

MARCO SALVADORI

ESPOSIZIONE

DELLA

TEORIA DELLE SOMME DI GAUSS

E DI

ALCUNI TEOREMI DI EISENSTEIN

Tesi presentata alla Facoltà di Scienze dell'Università di Friburgo (Svizzera)
per ottenere il grado di Dottore in Scienze Matematiche.

PISA

TIPOGRAFIA SUCCESSORI FRATELLI NISTRI

1904

MARCO SALVADORI

ESPOSIZIONE

DELLA

TEORIA DELLE SOMME DI GAUSS

E DI

ALCUNI TEOREMI DI EISENSTEIN

Tesi presentata alla Facoltà di Scienze dell'Università di Friburgo (Svizzera)
per ottenere il grado di Dottore in Scienze Matematiche.



PISA

TIPOGRAFIA SUCCESSORI FRATELLI NISTRI

1904

(Proprietà letteraria)

AI MIEI GENITORI

RAFFAELLO E FULVIA

IN SEGNO DI AFFETTO FILIALE.

COMMISSIONE ESAMINATRICE

PROF. GIRARD. Decano della facoltà di scienze. *Presidente.*

PROF. LERCH

» DANIELS

» VON KOWALSKI

} *Esaminatori.*

PROF. DHÉRÉ. *Segretario.*

Curriculum vitae. — Il candidato ha ottenuto la licenza liceale al Liceo Galileo di Pisa; ha studiato Teologia a Volterra, e frequentato il primo biennio di Scienze Fisiche e Matematiche all'Università di Pisa. Nel semestre d'inverno del 1900-1901, stabilitosi in Svizzera per occuparsi dell'assistenza religiosa e civile degli operai italiani emigrati, contemporaneamente si iscrisse alla Facoltà di Scienze dell'Università governativa di Friburgo (Svizzera), e la frequentò per sei semestri.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

PREFAZIONE

Da un secolo a questa parte i più grandi matematici, quali Gauss, Dirichlet, Cauchy, Kronecker, hanno fatto oggetto di studi speciali la determinazione esatta del valore della somma delle potenze delle radici primitive di un'equazione binomia, aventi per esponente i quadrati dei numeri inferiori al modulo dato. Gauss calcolò il valore del quadrato di queste somme nella sua *teoria della divisione del circolo*: ma, quando dal quadrato si passava alla base, rimaneva l'incertezza del segno. Alla determinazione di questo segno consacrò nel 1808 una memoria speciale intitolata « *Summatio quarundam serierum singularium* » ¹⁾, che a ragione è ritenuta come uno dei più bei lavori dell'illustre analista. In essa riuscì a trasformare le somme in questione in prodotti di seni d'archi equidifferenti, che si posson calcolare facilmente, e che non presentano più ambiguità di segno. Queste somme sono dette « Somme di Gauss », e costituiscono un esempio notevole e caratteristico della chiarezza e semplicità con cui per mezzo dell'analisi si posson risolvere certe questioni di Aritmetica, che per mezzo dell'Algebra o sarebbero state insolubili, o avrebber domandato una serie di ricerche abbastanza acute e profonde quali sono quelle della « *Summatio quarundam ecc.* ».

« La difficoltà di afferrar bene lo svolgimento delicato delle considerazioni che condussero Gauss a questa ingegnosa trasformazione », mosse Dirichlet a cercare se si potesse arrivare per altra via al medesimo risultato: e si deve a lui il merito di aver trovato le relazioni tra le Somme di Gauss e gli integrali definiti, relazioni che illustrò con una chiarezza straordinaria in una memoria presentata all'Accademia

¹⁾ *Werke*, II B. s. 9. — Göttingen.

di Berlino il 23 giugno 1835. — Cinque anni più tardi Cauchy dava un potente impulso a questi studi, mettendo in evidenza il legame che esiste fra le Somme di Gauss e certe funzioni che sono poi le funzioni ellittiche, la cui teoria a quel tempo non era generalmente conosciuta. — Kronecker estese queste considerazioni, ed in una memoria presentata all'Accademia di Berlino nel 1880 dedusse le Somme di Gauss dalla teoria delle funzioni di variabile complessa. Inoltre (l. c.) si propose di dimostrare come, partendo da una legge fondamentale delle Somme di Gauss, la *legge di reciprocità*, si possa arrivare alla formula per la trasformazione lineare delle serie Theta di Jacobi: ma non riuscì nel suo intento, come ha provato il sig. Lerch in una memoria comparsa nei *Mathematische Annalen* (1903).

Avuto riguardo allo stato attuale di questi studi, mi è sembrato utile dare uno sguardo retrospettivo a ciò che è stato scritto, e fare una breve esposizione dei differenti metodi che posson condurre alla determinazione delle Somme di Gauss: molto più che anche nei trattati recenti sulla Teoria dei numeri questi metodi sono esposti certamente con scrupolosa fedeltà; ma senza aggiungervi quel rigore nei particolari che esige oggi l'analisi. Ciò non si poteva pretendere per l'avanti, ma ora che i fondamenti del calcolo sono stabiliti in modo da non lasciar più luogo ad alcun dubbio, spero che non si reputerà inutile quanto è contenuto nel primo Capitolo di questo lavoro. Ho preso come fondamento la *legge di reciprocità* che esiste fra le Somme di Gauss, e nel I Cap. sono contenuti i diversi metodi analitici che vi conducono. Stabilita questa legge è facile dedurne la *legge di reciprocità di Legendre*, che viene estesa al caso di due numeri qualunque positivi o negativi nel II Cap. In questo capitolo si studiano le differenti forme che prende la legge di reciprocità, introducendo la definizione di Discriminante data da Kronecker; e sono sviluppate certe proprietà del simbolo di Legendre, che sono utilissime in alcune ricerche di aritmetica. — Nel III Cap. espongo nella sua parte essenziale il metodo classico di Gauss; e mi è sembrato utile, per illustrare il procedimento tenuto dal grande geometra, accennare all'analogia che le sue formulè hanno coi coefficienti binomiali. I teoremi di Schering ed Eisenstein formano come un complemento, e costituiscono il Cap. IV.

Per la trattazione della Tesi, oltre che delle opere citate appresso, mi son servito anche degli appunti presi alle lezioni del prof. LERCH, a cui esprimo la mia riconoscenza per i saggi consigli e per le direzioni che mi ha dato con sollecita premura, durante la compilazione di questo lavoro. A lui ed al prof. DANIELS, nominati dalla Facoltà revisori della Tesi, manifesto pure la mia gratitudine, per essere stati così benevoli nel formularne il rapporto.

BIBLIOGRAFIA

- BACHMANN. — *Niedere Zahlentheorie*, Teubner. Leipzig 1902.
 — *Analytische Zahlentheorie*, Teubner. Leipzig 1894.
- BAUMGART. — *Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz*, Teubner. Leipzig 1885.
- CAUCHY. — *Ouvres Complètes*, I.^{re} Série, T. V. Gauthier-Villars, Paris 1850 —
Sur les résidus inferieurs à un module donné.
 — *Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées formées avec les racines primitives des équations binomes.*
- DIRICHLET LEJEUNE. — *Vorlesungen über Zahlentheorie herausg. von Dedekind*, 4 aufl. 1894.
- GAUSS. — *Werke*, I und II Band, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1863.
- GENOCCHI. — *Note sur la théorie des résidus quadratiques*, Memoirs de Bruxelles 1854.
- KRONECKER. — *Ueber den vierten Gaussischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste*, Monatsber. d. B. A., 1880. — *Altre memorie della medesima Accademia pubblicate negli anni 1884, 1885* — Festschrift d. math. Gesellschaft Hamburg — *Summirung der Gaussischen Reihen*

$$\sum_{h=1}^{n-1} e^{\frac{2h^2 \pi i}{n}}$$
 . Jour. für die reine und andgew. math. B. 105.
- JACOBI. — *Ueber einige der Binomialreihe analoge Reihen*, Crelle 32.
- LANDSBERG. — *Zur Theorie des Gaussischen Summen und der Thetafunctionen.*
 Jour. f. die r. u. a. Mathematik, B. 111.
- LEBESGUE. — *Journal de Liouville*, février 1840.
- LERCH — *Jornal de sciencias Mathematicas e astronomicas* 1887, Mathematiche, Annalen, T. 57, 1903.
- SCHERING — Berl. Monatsber. 1876 Acta Math. I, pag. 153.
- STERN. — *Ueber einige Eigenschaften der Function Ex*, Crelle 59, 1860.
- TARDY. — *Sopra alcuni teoremi aritmetici*. Annali di Matematica, Serie II, T. 3°. p. 331.
-

CAPITOLO I.

Metodi analitici

§. 1.

Definizione delle Somme di Gauss — Enunciato della legge di reciprocità delle Somme di Gauss.

1. Faranno oggetto di questo studio le somme della forma seguente

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}},$$

ove λ e μ sono dei numeri interi positivi o negativi, ed il secondo è differente da zero. Tali somme sono dette *Somme di Gauss*, e per brevità porremo

$$(I) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} = G(\lambda, \mu).$$

Prendendo $\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}$ in modo che la sua parte reale sia positiva, la legge di reciprocità fra le *Somme di Gauss* è espressa dalla formola seguente

$$(II) \quad G(\lambda, \mu) \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G(-\mu, \lambda);$$

formola che fu riconosciuta da Cauchy ¹⁾, e illustrata ampiamente da Kronecker ²⁾.

¹⁾ Comptes rendus et Jour. de Liouville, 1840.

²⁾ Ueber den vierten Gauss' chen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Resten, Monatsb. der Berl. Ak. 1880.

§. 2.

a) Metodo di Dirichlet e Kronecker.

2. Sia $f(x)$ una funzione che soddisfa alle condizioni di convergenza dello sviluppo trigonometrico, nell'intervallo che va da 0 ad 1; si ha

$$(1) \quad \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_{\nu} \cos 2\nu x \pi + B_{\nu} \sin 2\nu x \pi),$$

ove

$$A_{\nu} = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\nu x \pi dx, \quad B_{\nu} = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\nu x \pi dx.$$

Introduciamo i valori negativi di ν , ponendo $A_{-\nu} = A_{\nu}$, $B_{-\nu} = -B_{\nu}$, e se scriviamo $\frac{1}{2} A_{\nu} + \frac{1}{2} A_{-\nu}$ al luogo di A_{ν} , $\frac{1}{2} B_{\nu} - \frac{1}{2} B_{-\nu}$ al luogo di B_{ν} , ed aggiungiamo il simbolo $B_0 = 0$, la (1) diverrà

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \frac{1}{2} (A_{\nu} \cos 2\nu x \pi + B_{\nu} \sin 2\nu x \pi).$$

Scrivendo invece di A_{ν} e B_{ν} gli integrali che essi rappresentano

$$(2) \quad \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_0^1 f(\lambda) \cos 2\nu \pi (\lambda - x) d\lambda,$$

formola che ha luogo per $0 < x < 1$, e che può essere estesa ai valori $x=0$, $x=1$, se si fa la convenzione di scrivere

$$f(-0) = f(1-0), \quad f(1+0) = f(0).$$

3. Sia ora a un numero intero, e facciamo

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda + a),$$

ove $\varphi(x)$ è una funzione che soddisfa alle condizioni necessarie per lo sviluppo in serie di Fourier. Quando x percorre l'intervallo $(0 \dots 1)$,

$x + a$ percorre l'intervallo $(a \dots a + 1)$; e se x_1 rappresenta uno dei valori di x compresi fra 0 ed 1, possiamo scrivere

$$\frac{\varphi(x_1 + a + 0) + \varphi(x_1 + a - 0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_0^1 \varphi(\zeta + a) \cos 2 \nu \pi (\zeta - x_1) d\zeta,$$

e facendo $\zeta + a = y$, si ha

$$\frac{\varphi(x_1 + a + 0) + \varphi(x_1 + a - 0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_a^{a+1} \varphi(y) \cos 2 \nu \pi (y - x_1) dy.$$

Poniamo $x_1 + a = x$, e rappresentiamo con x la variabile d'integrazione del secondo membro: la formola precedente prende così la forma

$$(3) \quad \frac{\varphi(x + 0) + \varphi(x - 0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_a^{a+1} \varphi(x) \cos 2 \nu \pi (x - x) dx$$

che ha valore per x facente parte dell'intervallo $(a \dots a + 1)$.

Possiamo introdurre anche le estremità di detto intervallo, se facciamo la convenzione di prendere

$$\varphi(a - 0) = \varphi(a + 1 - 0), \quad \varphi(a + 1 + 0) = \varphi(a + 0).$$

Il caso particolare di $x = a$ ci dà

$$\frac{\varphi(a + 0) + \varphi(a + 1 - 0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_a^{a+1} \varphi(x) \cos 2 \nu \pi x dx:$$

scrivendo la medesima formola per $a = 0, 1, 2, \dots, l - 1$, e sommando si ha

$$\frac{1}{2} \varphi(0) + \frac{\varphi(1 - 0) + \varphi(1 + 0)}{2} + \dots + \frac{\varphi(l - 1 - 0) + \varphi(l - 1 + 0)}{2} + \frac{1}{2} \varphi(l - 0) =$$

(4)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_0^l \varphi(x) \cos 2 \nu \pi x dx.$$

4. Sieno λ e μ due numeri interi e positivi, e facciamo nella formola (4)

$$\varphi(x) = e^{-\frac{z^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(x);$$

supponiamo inoltre che $f(x)$ sia continua pei valori interi di x e che abbia

come periodo 2μ , cioè che sia

$$f(x + 2\mu) = f(x), \quad \text{e per conseguenza } f(2\mu) = f(0):$$

se facciamo $l = 2\mu$, abbiamo $\varphi(l - 0) = \varphi(2\mu) = \varphi(0)$, ossia il primo e l'ultimo termine della (4) divengono uguali fra loro. Per un teorema di Poisson l'eguaglianza della serie trigonometrica e della funzione sussiste in un punto qualunque, tutte le volte che la serie è convergente; dunque si può scrivere

$$\sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_0^{2\mu} e^{-\frac{z^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(x) \cos 2x \nu \pi dx.$$

Se sostituiamo l'esponenziale al coseno, i termini nei quali apparisce il seno si distruggono due a due a causa del cangiamento del segno e quindi

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^n \int_0^{2\mu} e^{-\frac{z^2 \lambda \pi i}{\mu} - 2z \nu \pi i} f(x) dx.$$

Facciamo $\nu = 2\lambda m + h$ ($h = 0, 1, \dots, 2\lambda - 1$; $m = 0, \pm 1, \dots, \pm N$); gli indici della somma varieranno da $-2\lambda N$ a $2\lambda N + 2\lambda - 1$; ma per n indefinitivamente crescente, divengono infinitamente piccoli i $2\lambda - 1$ integrali

$$\int_0^{2\mu} e^{-\frac{z^2 \lambda \pi i}{\mu} - 2z \nu \pi i} f(x) dx, \quad \text{ove } n < \nu \leq n + 2\lambda - 1;$$

si può dunque scrivere

$$\sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^{n+2\lambda-1} \int_0^{2\mu} e^{-\frac{z^2 \lambda \pi i}{\mu} - 2z \nu \pi i} f(x) dx,$$

e supponendo che sia $n = 2\lambda N$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \sum_{h=0}^{2\lambda-1} \int_0^{2\mu} e^{-\frac{z^2 \lambda \pi i}{\mu} - 2(2\lambda m + h)z \pi i} f(x) dx = \\ &= \sum_{h=0}^{2\lambda-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \int_0^{2\mu} e^{-\frac{z^2 \lambda \pi i}{\mu} - 2(2\lambda m + h)z \pi i} f(x) dx. \end{aligned}$$

Poniamo $x + 2m\mu = x$; si ha

$$\int_0^{2\mu} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2(2\lambda m + h) x \pi i f(x) dx = \int_{2\mu m}^{2\mu(m+1)} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2hx\pi i f(x) dx,$$

$$\sum_{m=-N}^N \int_{2\mu m}^{2\mu(m+1)} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2hx\pi i f(x) dx = \int_{-2\mu N}^{2\mu(N+1)} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2hx\pi i f(x) dx$$

e per conseguenza

$$\sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(k) = \sum_{h=0}^{2\lambda-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-2\mu N}^{2\mu(N+1)} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2hx\pi i f(x) dx.$$

Supponendo che gli integrali $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2hx\pi i f(x) dx$ abbiano

un senso, la formola precedente prende la forma sotto cui la presentò Kronecker

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} f(k) = \sum_{h=0}^{2\lambda-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2hx\pi i f(x) dx.$$

Le condizioni, oltre quelle richieste per lo sviluppo di Fourier, sono che $f(x)$ abbia il periodo 2μ , che divenga continua pei valori interi della variabile, e sopra tutto che gli integrali del secondo membro esistano.

5. Facciamo $f(x) = 1$, ed allora resterà solamente a verificar la condizione dell'esistenza degli integrali. Rammentiamo che λ e μ sono positivi, e facciamo la convenzione di prender sempre nelle formole seguenti

$\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}$, e $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ col segno positivo. L'esistenza dell'integrale

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 \lambda \pi i}{\mu}} - 2hx\pi i dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + h\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^2 \pi i + h^2 \frac{\mu \pi i}{\lambda}} dx$$

si riduce a quella dell'integrale che si ottiene facendo $x = x\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + h\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$;

ora nell'equazione

$$J = e^{\frac{h^2 \mu \pi i}{\lambda}} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 \pi i} dz$$

l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 \pi i} dz$ esiste, come sappiamo dal calcolo integrale,

quindi la (6) ci dà

$$\sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 \pi i} dz \sum_{h=0}^{2\lambda-1} e^{\frac{h^2 \mu \pi i}{\lambda}}.$$

Per determinare il valore dell'integrale che è una costante numerica, facciamo $\lambda = 1$, $\mu = 2$: ne viene, dopo aver diviso per 2,

$$1 - i = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 \pi i} dz;$$

ora $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{i}}$, $\sqrt{\frac{1}{i}}$ essendo presa in maniera che la sua parte reale risulti positiva, quindi

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 \pi i} dz = \sqrt{\frac{1}{i}}$$

ed in fine

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{i\lambda}} \sum_{h=0}^{2\lambda-1} e^{\frac{h^2 \mu \pi i}{\lambda}}$$

ove $\lambda > 0$, $\mu > 0$, e per la convenzione fatta al principio di questo numero 5 e per il carattere di $\sqrt{\frac{1}{i}}$ nella formola (7), $\sqrt{\frac{\mu}{i\lambda}}$ è presa in maniera che la sua parte reale risulti positiva. Prendendo i valori coniugati, la (8) ci dà

$$(9) \quad \sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i\lambda}} \sum_{h=0}^{2\lambda-1} e^{-\frac{h^2 \mu \pi i}{\lambda}},$$

ove di nuovo sono positivi λ , μ , e la parte reale di $\sqrt{\frac{\mu}{-i\lambda}}$. Usando il

simbolo introdotto a pag. 13 (I) si potrà scrivere

$$(10) \quad G(\lambda, \mu) \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G(-\mu, \lambda),$$

formula che è verificata per λ e μ interi positivi o negativi. Infatti, se $\lambda' = -\lambda < 0, \mu > 0$, la formola (9) che si scrive

$$G(\lambda', \mu) \sqrt{\frac{\lambda' i}{\mu}} = G(-\mu, \lambda')$$

mostra che l'equazione (10) vale per $\lambda = \lambda'$ cioè per $\lambda < 0$.

Se poi $\mu < 0$, essendo per definizione

$$(11) \quad G(\lambda, \mu) = G(-\lambda, -\mu),$$

si opera su $G(-\lambda, -\mu)$, ove $-\mu$ è positivo, ed in fine applicandò di nuovo la (11) si ottiene la verificaione dell'equazione (10) per μ negativo.

Il metodo che ci ha condotto a questo risultato fu esposto da Kronecker nel *Festschrift d. math. Gesellschaft*, Amburgo, 1890 e si trova pure nelle *Vorlesungen über die Theorie der Integrale*, pubblicate da E. Netto nel 1894.

6. Per semplicità di quanto segue aggiungo qui ancora un'osservazione sulle somme di Gauss.

Supponiamo che λ e μ siano primi fra loro, e scriviamo

$$\begin{aligned} G(\lambda, \mu) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{(k+|\mu|)^2 \lambda \pi i}{\mu}} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} + e^{\pi i \lambda \mu} \sum_{k=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} \right\} = \frac{1 + (-1)^{\lambda \mu}}{2} \sum_{k=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}}. \end{aligned}$$

In quest'ultima espressione sono acciusi due risultati, e cioè

$$(12) \quad G(\lambda, \mu) \begin{cases} = 0 & \text{quando } \lambda \mu \equiv 1 \pmod{2}. \\ = \sum_{k=0}^{|\mu|-1} e^{-\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}} & \text{quando } \lambda \mu \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

b) **Le serie trigonometriche e le somme di Gauss.**

7. La seguente esposizione semplifica quella di Dirichlet, ed è dovuta al sig. Lerch, il quale ha fatto vedere che il valore della somma

$$G(2, \mu) = \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2k^2\pi i}{\mu}} \quad (\mu > 0)$$

risulta da una rappresentazione conveniente della funzione

$$(13) \quad \varphi(u) = \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2\pi i}{\mu}(u+k)^2}, \quad (0 \leq u \leq 1),$$

ove si faccia $u = 0$. Lo sviluppo trigonometrico per $0 < u < 1$, ha valore in questo caso anche per $u = 0$, grazie all'eguaglianza $\varphi(0) = \varphi(1)$. Sia pertanto

$$\varphi(u) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v e^{2v u \pi i} \quad (0 \leq u \leq 1),$$

ne viene

$$\varphi(0) = \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2k^2\pi i}{\mu}} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v.$$

Ora

$$A_v = \int_0^1 \varphi(u) e^{-2v u \pi i} du = \sum_{k=0}^{\mu-1} \int_0^1 e^{-\frac{2\pi i}{\mu}(u+k)^2 - 2v u \pi i} du,$$

o, facendo $u + k = x$,

$$A_v = \sum_{k=0}^{\mu-1} \int_k^{k+1} e^{-\frac{2x^2\pi i}{\mu} - 2v x \pi i} dx = \int_0^{\mu} e^{-2\pi i \left(\frac{x^2}{\mu} + vx\right)} dx,$$

ed ancora, ponendo $x = \mu y$,

$$(14) \quad A_v = \mu \int_0^1 e^{-2\mu\pi i(y^2 + vy)} dy.$$

a) Facciamo uso dell'identità $y^2 + \nu y = \left(y + \frac{\nu}{2}\right)^2 - \frac{\nu^2}{4}$; allora per $\mu = 4l$, l essendo un intero positivo,

$$e^{-2\mu\pi i(y^2 + \nu y)} = e^{-2\mu\pi i\left(y + \frac{\nu}{2}\right)^2}$$

e quindi

$$A_\nu = \mu \int_0^1 e^{-2\mu\pi i\left(y + \frac{\nu}{2}\right)^2} dy = \mu \int_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}+1} e^{-2z^2\mu\pi i} dz.$$

Si ha dunque

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n} = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-2z^2\mu\pi i} dz = \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2z^2\mu\pi i} dz,$$

e parimente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n+1} = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} e^{-2z^2\mu\pi i} dz = \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2z^2\mu\pi i} dz;$$

sommando

$$(15) \quad \varphi(0) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu = 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2z^2\mu\pi i} dz.$$

Poniamo $z = \frac{x}{\sqrt{\mu}}$, e prendiamo $\sqrt{\mu}$ col segno positivo, ne viene

$$(16) \quad 2\sqrt{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2\pi i} dx = \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2k^2\pi i}{\mu}} \quad (\mu = 4l > 0).$$

Il valore dell'integrale definito si ottiene prendendo $\mu = 4$: infatti allora si ha

$$2(1-i) = 2\sqrt{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2\pi i} dx$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2\pi i} dx = \frac{1-i}{2},$$

e la (16) ci dà

$$(17) \quad \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2k^2\pi i}{\mu}} = (1-i) \sqrt{\mu}^- \quad \left(\mu \equiv 0 \pmod{4}, \mu > 0 \right)$$

che è la formola principale nell'esposizione di Dirichlet.

b) Per il caso di $\mu = 4l + 1$ la formola (14) diviene

$$A_\nu = i^{\nu^2} \mu \int_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}+1} e^{-2z^2\mu\pi i} dx,$$

la somma dei termini con indice pari resta la medesima come nel caso di $\mu = 4l$, la somma dei termini con indici impari è moltiplicata per i , si ha dunque invece della formola (15)

$$(18) \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu = (1+i) \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2z^2\mu\pi i} dx,$$

e poichè conosciamo il valore dell'integrale, possiamo dedurne

$$(19) \quad \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2k^2\pi i}{\mu}} = \frac{(1+i)(1-i)}{2} \sqrt{\mu}^- = \sqrt{\mu}^- \quad \left(\mu \equiv 1 \pmod{4}, \mu > 0 \right).$$

c) Nel caso di $\mu = 4l - 1$.

$$A_\nu = (-i)^{\nu^2} \mu \int_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}+1} e^{-2z^2\mu\pi i} dx,$$

e quindi

$$(20) \quad \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2k^2\pi i}{\mu}} = -i \sqrt{\mu}^-, \quad \left(\mu \equiv -1 \pmod{4}, \mu > 0 \right).$$

d) In fine per $\mu = 4l + 2$

$$A_\nu = (-1)^\nu \mu \int_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}+1} e^{-2z^2\mu\pi i} dx,$$

le due somme l'una cogli A_ν di indice pari, l'altra con A_ν di indice

impari, somme che ci hanno condotto alla (15), divengono ora uguali e di segno contrario, dunque

$$(21) \quad \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-\frac{2k^2\pi i}{\mu}} = 0 \quad \left(\mu \equiv 2 \pmod{4}, \mu > 0 \right)$$

Nelle formule (17), (19), e (20) è sempre $\sqrt{\mu} > 0$. Esse insieme alla (21) ci danno il valore di $G(2, \mu)$ per μ intero, positivo qualunque.

§ 3.

**Il metodo di Cauchy, per la determinazione delle somme di Gauss,
per mezzo delle Funzioni Ellittiche.**

8. Una delle serie che, secondo Jacobi, prendono il nome di serie ϑ , è la seguente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2 \omega \pi i + 2nu\pi i}$$

che vien rappresentata col simbolo $\vartheta_{00}(u|\omega)$, o coll'altro $\vartheta_3(u|\omega)$ ¹⁾. Essa è assolutamente convergente, quando il coefficiente della parte immaginaria di ω è positivo. Nella teoria della trasformazione lineare per le funzioni ellittiche si dimostra che, se si prende per $\sqrt{\frac{i}{\omega}}$ quel segno che dà un valore positivo alla sua parte reale, si ha ²⁾.

$$(1) \quad e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}} \vartheta_3(u|\omega) = \sqrt{\frac{i}{\omega}} \vartheta_3\left(u \middle| \frac{-1}{\omega}\right).$$

Mettiamo $u = 0$, $\omega = \alpha i$; sarà

$$\vartheta_3(0|\alpha i) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \alpha \pi}, \quad \vartheta_3\left(0 \middle| \frac{i}{\alpha}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{\alpha}},$$

¹⁾ Per la teoria di queste funzioni si può vedere BIANCHI, *Lezioni sulle Funzioni Ellittiche*. § 155-159. Pisa 1901.

²⁾ BIANCHI. *ibid.* pag. 419, (XXII).

e sostituendo nella (1)

$$(2) \quad \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \alpha \pi} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{\alpha}}.$$

Sia $\sqrt{\alpha \pi} = a$, $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = b$, da cui $ab = \pi$; si avrà

$$(3) \quad \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 a^2} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 b^2},$$

e moltiplicando per $\sqrt{b} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$,

$$(4) \quad \sqrt{a} \left(\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + \dots \right) = \sqrt{b} \left(\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + \dots \right),$$

ove $a, b, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ hanno le loro parti reali positive e $ab = \pi$.

9. La formula (1) che si trova negli scritti postumi di Gauss, fu data da Cauchy nel 1817. Nel 1840 ¹⁾ questi riprese la (4) considerando un caso limite, per concluderne il valore della quantità $G(2, \mu)$, e la relazione fondamentale $G(\lambda, \mu) \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} = G(-\mu, \lambda)$, che per altro si limitò ad enunciare. Nella memoria presentata dall'illustre matematico è indicato il germe del calcolo, ma il processo del ragionamento può esser perfezionato: per esempio, per α approssimantesi indefinitamente a zero, si dà come conseguenza della

definizione di integrale, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha (1 + e^{-\alpha^2} + e^{-4\alpha^2} + \dots) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$;²⁾

mentre la definizione abituale di integrale,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n f(x_{2\nu+1}) (x_{2\nu+2} - x_{2\nu})$$

¹⁾ C. R. T. X pag. 560-6 aprile 1840. V. opere complete pubblicate da Gauthier Villars a Parigi I.^a serie, Tomo V, pag. 152 e seg. *Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes.*

²⁾ Memoria citata § 1, formula (10).

per una divisione qualunque del tratto $a \dots b$, suppone che i limiti sieno finiti, e non è evidente *a priori* che facendo $f(x) = e^{-x^2}$,

$$x_{2\nu+1} = x_{2\nu} = \nu\alpha, \text{ da cui } x_{2\nu+2} - x_{2\nu} = \alpha, \text{ si abbia } \int_0^\infty e^{-x^2} dx =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu^2 \alpha^2} : \text{ la definizione ordinaria dell'integrale del primo mem-}$$

$$\text{bro è } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^\nu e^{-x^2} dx.$$

Pertanto, per completare il metodo di Cauchy, esporrò un procedimento svolto dal sig. Lerch in una lettera indirizzata al sig. F. G. Teixeira nel 1887¹⁾.

10. Nella formola (2) facciamo $\alpha = x + \frac{\lambda i}{\mu}$, con x reale e positivo, λ e μ interi e qualunque; si ha

$$(5) \quad \sqrt{x + \frac{\lambda i}{\mu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi \left(x + \frac{\lambda i}{\mu}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x + \frac{\lambda i}{\mu}}}.$$

Vogliamo vedere che cosa diviene questa formola per x indefinitamente decrescente. Sia $n = \rho + 2\mu\nu$, e rappresentiamo con S la somma seguente

$$(6) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi \left(x + \frac{\lambda i}{\mu}\right)} = \sum_{\rho=0}^{2|\mu|-1} e^{-\rho^2 \frac{\pi i}{\mu}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(\rho + 2\mu\nu)^2 x \pi}.$$

Per vedere come si comporta S pei valori infinitamente piccoli di x bisogna studiare il carattere della serie

$$S_\rho = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(\rho + 2\mu\nu)^2 x \pi},$$

¹⁾ Jornal de sciencias matematicas e astronomicas V. 8. Lo scopo di questa lettera è di dimostrare in una nuova maniera il teorema di Weierstrass che la funzione $\vartheta_3(0|\omega)$ è limitata al semipiano positivo (Monatsberichte, Berlin. 1880). Si può vedere anche l'eccellente libro di WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, 1886.

od anche il carattere delle due serie

$$S'_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\rho+2\mu\nu)^2 x \pi} \qquad S''_\rho = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-(-\rho+2\mu\nu)^2 x \pi}$$

la cui somma è S_ρ .

11. Supponiamo che μ sia positivo. La $e^{-(\rho+2\mu\nu)^2 x \pi}$ considerata come funzione della variabile x , decresce quando x aumenta da zero all'infinito, e per un teorema elementare

$$e^{-(\rho+2\mu\nu)^2 x \pi} > \int_{\nu}^{\nu+1} e^{-(\rho+2\mu z)^2 x \pi} dz > e^{-(\rho+(\nu+1)2\mu)^2 x \pi},$$

facendo $\rho + 2\mu\nu = y$, la doppia disequaglianza prende la forma seguente

$$2\mu e^{-(\rho+2\mu\nu)^2 x \pi} > \int_{\rho+2\mu\nu}^{\rho+2\mu(\nu+1)} e^{-y^2 x \pi} dy > 2\mu e^{-(\rho+2\mu(\nu+1))^2 x \pi}.$$

Se poniamo successivamente $\nu = 0, 1, 2, \dots$ e sommiamo, si ottiene

$$2\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\rho+2\mu\nu)^2 x \pi} > \int_{\rho}^{\infty} e^{-y^2 x \pi} dy > 2\mu \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-(\rho+2\mu\nu)^2 x \pi} :$$

e poichè le due serie differiscono fra loro di $2\mu e^{-\rho^2 x \pi}$, si può scrivere

$$2\mu S'_\rho = \int_{\rho}^{\infty} e^{-y^2 x \pi} dy + \varepsilon 2\mu e^{-\rho^2 x \pi}, \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Facciamo $z = y\sqrt{x}$:

$$\int_{\rho}^{\infty} e^{-y^2 x \pi} dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\rho\sqrt{x}}^{\infty} e^{-z^2 \pi} dz,$$

e per conseguenza

$$2\mu \sqrt{x} S'_\rho = \int_{\rho\sqrt{x}}^{\infty} e^{-z^2 \pi} dz + \varepsilon 2\sqrt{x} \mu e^{-\rho^2 x \pi},$$

da cui si deduce la formola seguente

$$2\mu \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} S'_\rho = \int_0^{\infty} e^{-z^2 \pi} dz = \frac{1}{2}.$$

Si troverebbe allo stesso modo

$$2\mu \lim_{x=0} \sqrt{x} S''_{\rho} = \frac{1}{2},$$

e sommando

$$(7) \quad \mu \lim_{x=0} \sqrt{x} S_{\rho} = \frac{1}{2}.$$

Possiamo così dedurre dalla (6), la formola ausiliare seguente

$$(8^a) \quad \lim_{x=0} \sqrt{x} S = \lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{\rho=0}^{2\mu-1} e^{-\frac{\rho^2 \lambda \pi i}{\mu}} S_{\rho} = \frac{1}{\mu} G(\lambda, \mu).$$

Questo per $\mu > 0$: se fosse stato $\mu = -\mu' < 0$ si sarebbe ragionato su μ' ; S'_{ρ} si cangiava in S''_{ρ} , e reciprocamente, si sarebbe così ottenuto

$$|\mu| \lim_{x=0} \sqrt{x} S_{\rho} = \frac{1}{2} \quad (8^b) \quad \lim_{x=0} \sqrt{x} S = \frac{1}{|\mu|} G(\lambda, \mu).$$

12. Posto ciò, moltiplichiamo i due membri della (5) per $\sqrt{x}$, e nella formola che risulta

$$(9) \quad \sqrt{x + \frac{\lambda i}{\mu}} \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi \left(x + \frac{\lambda i}{\mu}\right)} = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x + \frac{\lambda i}{\mu}}}$$

passiamo al limite per $x = 0$. Qualunque sia il segno di μ , il limite del primo membro per le formole (8^a) e (8^b) si può scrivere come segue:

$$A = \frac{1}{|\mu|} \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} G(\lambda, \mu)$$

ove, per quanto è stato detto al numero 8, $\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}$ deve esser preso col segno che dà un valore positivo alla sua parte reale, cosa che si esprime brevemente scrivendo $\text{Real} \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} > 0$. Cerchiamo l'espressione del limite del secondo membro

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x + \frac{\lambda i}{\mu}}} = \lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi \left(x - \frac{\lambda i}{\mu}\right)}{x^2 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}}} = \\ &= \lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda}\right)}{1 + \frac{\mu^2 x^2}{\lambda^2}}}. \end{aligned}$$

Per ottenere questo limite Kronecker ha senz'altro trascurato nel denominatore dell'esponente il termine $\frac{\mu^2 x^2}{\lambda^2}$; ma avanti di trascurarlo, sarà prudente dimostrare che la differenza

$$\Delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{n^2 \pi}{1 + \frac{\mu^2 x^2}{\lambda^2}} \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right)} - e^{-n^2 \pi \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right)} \right\}$$

è finita per x infinitamente piccolo. A questo scopo rammentiamo il teorema di Darboux

$$|f(u) - f(v)| \leq |f'(w)| \cdot |u - v|,$$

ove w rappresenta una quantità il cui indice si trova sulla linea che unisce gli indici di u e di v . Nel nostro caso $f(x) = e^x$,

$$u - v = n^2 \pi \left\{ \frac{\mu^2}{\lambda^2} x \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2} \right) + \frac{\mu i}{\lambda} \left(\frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2} - 1 \right) \right\},$$

da cui

$$\left| e^{-\frac{n^2 \pi}{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2} \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right)} - e^{-n^2 \pi \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right)} \right| \leq \\ \leq n^2 \pi \frac{\frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2}{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2} \left| \frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right| \cdot \left| e^{-\frac{n^2 \pi}{1 + \epsilon} \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right)} \right| \quad \left(0 < \epsilon < \frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2 \right).$$

Essendo il secondo membro della disuguaglianza minore di

$$n^2 \pi \frac{\mu^2}{\lambda^2} x^2 \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| e^{-\frac{\pi \mu^2 n^2 x}{2 \lambda^2}},$$

si ha per x sufficientemente piccolo

$$\Delta < \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \frac{2 \pi \mu^2 x^2}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{\mu^2 n^2 \pi x}{2 \lambda^2}}.$$

Sia $\frac{\mu^2}{2 \lambda^2} x = \beta$, e rappresentiamo con Δ' il secondo membro di quest'ul-

tima disequaglianza: si ha

$$(10) \quad \Delta' = \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| 8 \beta^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 \beta \pi}.$$

L'equazione che abbiamo già trovato

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \alpha \pi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{\alpha}} \right),$$

derivata rapporto ad α , ci dà

$$-2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 \alpha \pi} = -\frac{1}{2\alpha \sqrt{\alpha}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{\alpha}} \right) + \frac{2\pi}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{n^2 \pi}{\alpha}}$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 \alpha \pi} = \frac{1}{4\pi \alpha \sqrt{\alpha}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{\alpha}} \right) - \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{n^2 \pi}{\alpha}} :$$

scriviamo in questa equazione β al luogo di α , e sostituiamo nella (10), si ottiene

$$\Delta' = \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \left\{ 2\sqrt{\beta} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{\beta}} \right) - \frac{8\pi}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{n^2 \pi}{\beta}} \right\}.$$

Il secondo membro tende verso zero con β , così che $\lim_{\beta=0} \Delta' = 0$ ed al tempo stesso $\lim_{x=0} \Delta = 0$, perchè anche x tende a zero con β .

Si può ora scrivere, senza tema di errore

$$B = \lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right)}{1 + \frac{\mu^2 x}{\lambda^2}}} = \lim_{x=0} \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} x - \frac{\mu i}{\lambda} \right)},$$

e facendo $\frac{\mu^2}{\lambda^2} x = z$

$$B = \lim_{z=0} \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \sqrt{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi \left(z + \frac{-\mu i}{\lambda} \right)}.$$

Se $\lambda > 0$, a causa della (8) questo limite può scriversi

$$\frac{1}{\lambda} \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| G(-\mu, \lambda):$$

se $\lambda < 0$, si ha $\left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \frac{1}{\lambda} G(\mu, -\lambda)$, ma per la (11) del § 2 $G(\mu, -\lambda) = G(-\mu, \lambda)$, si potranno riunire i due casi nella formola

$$B = \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \frac{1}{|\lambda|} G(-\mu, \lambda) = \frac{1}{|\mu|} G(-\mu, \lambda)$$

A è il limite del primo membro dell'equazione (9), B il limite del secondo membro, e poichè debbono essere uguali, si ha la formola di Cauchy e di Kronecker

$$\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} G(\lambda, \mu) = G(-\mu, \lambda) \\ (\text{Real } \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} > 0; \mu \geq 0; \lambda \geq 0)$$

§. 4.

Altra esposizione del metodo di Cauchy.

13. Riprendiamo la formola (1) del numero 8

$$\sqrt{\frac{\omega}{i}} \vartheta_3(u|\omega) = e^{-\frac{u^2 \pi i}{\omega}} \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega} \middle| \frac{1}{\omega}\right),$$

poniamo $\omega = a i$, e sien positive le parti reali di a e di $\sqrt{a}$; ne risulta

$$(1) \quad \sqrt{a} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-av^2\pi + 2v u \pi i} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(u+v)^2}.$$

Introduciamo la funzione

$$(2) \quad \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi \left(x + \frac{\lambda i}{\mu}\right)}$$

ove λ e μ sono degli interi qualunque, e la parte reale di x è positiva:

facendo $n = 2\mu m + \rho$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $\rho = 0, 1, \dots |2\mu| - 1$;

$$\varphi(x) = \sum_{\rho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\rho^2 \lambda \pi i}{\mu}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-4\mu^2 \pi x \left(m + \frac{\rho}{2\mu}\right)^2}.$$

Ciò posto applichiamo la formola (1) per $\frac{1}{a} = 4\mu^2 x$, $u = \frac{\rho}{2\mu}$: avremo

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-4\mu^2 \pi x \left(v + \frac{\rho}{2\mu}\right)^2} = \frac{1}{|2\mu| \sqrt{x}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2 \pi}{4\mu^2 x} + \frac{v \rho \pi i}{\mu}}$$

da cui si deduce

$$(3) \quad \varphi(x) = \sum_{\rho=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\rho^2 \lambda \pi i}{\mu}} \frac{1}{|2\mu| \sqrt{x}} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi}{4\mu^2 x}} \cos \frac{m \rho \pi}{\mu} \right).$$

14. Supponiamo ora che x decresca indefinitamente, conservandosi la forma $x = \xi + i \eta$, da cui $\frac{1}{x} = \frac{\xi - i \eta}{\xi^2 + \eta^2}$: la parte reale di $\frac{1}{x}$ è espressa da

$$\text{Real } \frac{1}{x} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2}$$

e finchè $\frac{\eta}{\xi}$ resta finito, parte la reale di $\frac{1}{x}$ cresce indefinitamente, mentre x tende a zero. Con queste condizioni si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi}{4\mu^2 x}}}{\sqrt{x}} = 0$$

Inoltre

$$\left| e^{-\frac{m^2 \pi}{4\mu^2 x}} \right| = e^{-\frac{m^2 \pi}{4\mu^2} \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}} = \left(e^{-\frac{m^2 \pi}{8\mu^2} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}} \right)^2$$

$$\frac{\left| e^{-\frac{m^2 \pi}{4\mu^2 x}} \right|}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-\frac{m^2 \pi}{8\mu^2} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}}{\sqrt{x}} e^{-\frac{m^2 \pi}{8\mu^2} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}$$

e se x è sufficientemente piccolo,

$$\frac{e^{-\frac{m^2 \pi}{8 \mu^2} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}}{\sqrt{x}} < \delta.$$

La serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{m^2 \pi}{4 \mu^2 x}} \cos \frac{m \rho \pi}{\mu}$, sarà dunque in valore assoluto più piccola di

$$\delta \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi}{8 \mu^2} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}},$$

quantità che può esser minore di una costante δ' , data a piacere, quando x diviene sufficientemente piccolo conservando la forma convenuta al principio di questo numero. Per tali valori di x la funzione $\varphi(x)$ è data, almeno di una quantità infinitamente piccola, dalla formula seguente

$$\varphi(x) = \frac{1}{2 \mu \sqrt{x}} \sum_{\rho=0}^{|2 \mu|-1} e^{-\frac{\rho^2 \lambda \pi i}{\mu}}$$

da cui si deduce la nota formola

$$(4) \quad \lim_{x=0} \sqrt{x} \varphi(x) = \frac{1}{|\mu|} G(\lambda, \mu).$$

15. Poniamo ora nella formola

$$\sqrt{a} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-a v^2 \pi} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a} v^2}$$

la variabile a uguale ad $x + \frac{\lambda i}{\mu}$, e supponiamo x reale e positivo, λ e μ essendo due interi qualunque: moltiplicando i due membri per $\sqrt{x}$ avremo

$$(5) \quad \sqrt{x} \sqrt{x + \frac{\lambda i}{\mu}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\left(x + \frac{\lambda i}{\mu}\right) v^2 \pi} = \sqrt{x} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2 \pi}{x + \frac{\lambda i}{\mu}}}.$$

Non si tratta che del limite del secondo membro: si ha

$$e^{-\frac{n^2 \pi}{x + \frac{\lambda i}{\mu}}} = e^{-\frac{n^2 \mu \pi}{\lambda i} - \frac{n^2 \mu^2 \pi x}{\lambda^2 - \lambda \mu x i}},$$

ora facendo $z = \frac{\mu^2 x}{\lambda^2 - \lambda \mu x i}$, le ipotesi fatte su x , sono verificate anche per z , e quindi la funzione

$$\sqrt{z} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \mu \pi}{\lambda i} - n^2 \pi z}$$

potrà esser trattata come $\sqrt{x} \varphi(x)$, cioè a causa della (4)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{z} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi \left(z - \frac{\mu i}{\lambda} \right)} = \frac{1}{|\lambda|} G(-\mu, \lambda).$$

Il limite del secondo membro della (5) sarà dunque

$$\frac{1}{|\mu|} G(-\mu, \lambda):$$

comparandolo col limite del primo membro della medesima equazione, si ha come al numero 13,

$$\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} G(\lambda, \mu) = G(-\mu, \lambda).$$

§. 5.

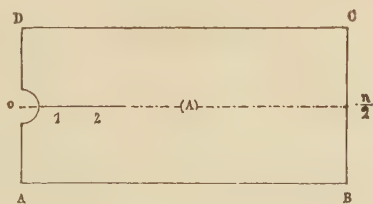
Secondo metodo di Kronecker. — Le somme di Gauss, stabilite per mezzo del teorema fondamentale di Cauchy sugli integrali delle funzioni di variabile complessa.

16. Sia n un intero positivo impari, e $A B C D = (A)$ una porzione del piano della variabile complessa $z = x + i y$, limitata dalle quattro rette

$$y = \pm Y, \quad x = 0,$$

$x = \frac{n}{2}$, e dalla semicirconferenza de-

scritta attorno all'origine con un piccolo raggio ϵ .



Consideriamo la funzione uniforme

$$f(z) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{e^{2z\pi i} - 1}$$

che, nell'area (A), ha $\frac{n-1}{2}$ poli nei punti $z = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$. Per un teorema di Cauchy, l'espressione

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(A)} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{e^{2z\pi i} - 1} dz$$

è uguale alla somma dei residui della funzione sotto il segno, relativamente ai poli interiori ad (A). Al polo $z = \nu$ corrisponde il residuo

$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{n} \nu^2}}{2\pi i}, \text{ e per conseguenza}$$

$$(1) \quad J = \int_{(A)} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{e^{2z\pi i} - 1} dz = \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{n} \nu^2}$$

17. L'integrale J si compone di quattro parti

$$\int_A^B f(z) dz = I; \int_B^C f(z) dz = II; \int_C^D f(z) dz = III; \int_D^A f(z) dz = IV:$$

quest'ultimo integrale IV ha come cammino d'integrazione i due segmenti di retta ($D \dots i\varepsilon$), ($-i\varepsilon \dots A$) e la semicirconferenza $|z| = \varepsilon$: si ha dunque

$$J = I + II + III + IV.$$

Lungo la linea $\bullet A B$, è $z = x - iY$,

$$\left| e^{\frac{2\pi i}{n} z^2} \right| = e^{\frac{4\pi}{n} xY}, \quad e^{2z\pi i} = e^{2x\pi i + 2Y\pi},$$

$$\left| f(z) \right| = \frac{e^{\frac{4\pi}{n} xY}}{\left| e^{2Y\pi + 2x\pi i} - 1 \right|} = \frac{e^{2\pi Y \left(\frac{2x}{n} - 1 \right)}}{\left| e^{2x\pi i} - e^{-2Y\pi} \right|},$$

e poichè $\frac{2x}{n} - 1$ è negativo, se supponiamo che Y cresca indefinitamente,

la funzione $f(z)$ diviene infinitamente piccola, e ne segue che

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} I = 0.$$

Lungo la retta CD , è $z = x + iY$

$$\left| e^{\frac{2\pi i}{n} z^2} \right| = e^{-\frac{4\pi}{n} xY}, \quad \left| e^{2z\pi i} \right| = e^{-2\pi Y} < 1,$$

e si ottiene come precedentemente

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} III = 0.$$

Per studiare l'integrale rettilineo II facciamo $z = \frac{n}{2} + ti$: ne viene

$$\begin{aligned} \lim_{Y \rightarrow \infty} II &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} \left(\frac{n^2}{4} - t^2 \right) - 2\pi t}}{e^{-2\pi t} + 1} i dt = -i e^{\frac{n\pi i}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{n} t^2}}{e^{\frac{2\pi i}{n} t} + 1} dt = \\ &= i \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{n} t} + 1} + \frac{1}{e^{-\frac{2\pi i}{n} t} + 1} \right) e^{-\frac{2\pi i}{n} t^2} dt, \end{aligned}$$

e poichè l'espressione dentro parentesi è uguale all'unità,

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} II = i \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{n} t^2} dt.$$

In fine, rammentando che ε è il raggio del semicerchio descritto attorno all'origine,

$$\begin{aligned} \lim_{Y \rightarrow \infty} IV &= - \int_{-i\infty}^{-i\varepsilon} f(z) dx - \int_{(\varepsilon)} f(z) dx - \int_{i\varepsilon}^{\infty} f(z) dx = \\ &= - \int_{(\varepsilon)} f(z) dx - \int_{i\varepsilon}^{\infty} (f(z) + f(-z)) dz - \int_{(\varepsilon)} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{e^{2z\pi i} - 1} dz + \int_{i\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}} dz. \end{aligned}$$

Si sa che

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{(\varepsilon)} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{2z\pi i - 1} dz = i\pi \operatorname{Res}(z=0) = \frac{1}{2};$$

ne viene, supponendo ε infinitamente piccolo,

$$\lim_{Y=\infty} IV = -\frac{1}{2} + \int_0^{i\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{e} dz;$$

e facendo $z = ti$,

$$\lim_{Y=\infty} IV = -\frac{1}{2} + i \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2\pi i}{n} t^2}}{e} dt;$$

dunque, l'integrale della formola (1) diviene

$$(2) \quad J = -\frac{1}{2} + i(1-i^n) \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2\pi i}{n} t^2}}{e} dt.$$

18. Sia $x = \sqrt{\frac{2}{n}} t$, colla radice presa positivamente; rammentando la (7) del numero 5, otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2\pi i}{n} t^2}}{e} dt = \sqrt{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\pi x^2 i}}{e} dx = \frac{1-i}{4} \sqrt{n}$$

e per le formole (1) e (2)

$$(3) \quad \sum_{v=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} v^2}}{e} = -\frac{1}{2} + \frac{i(1-i)(1-i^n)}{4} \sqrt{n},$$

da cui si conchiude

$$\left(\begin{array}{l} n > 0 \\ \text{e impari} \end{array} \right) G(-2, n) = \frac{(1+i)(1-i^n)}{2} \sqrt{n} \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt{n} \quad \text{per } n \equiv 1 \pmod{4} \\ = i\sqrt{n} \quad \text{per } n \equiv -1 \pmod{4}. \end{array} \right.$$

Questo metodo è stato pubblicato da Kronecker nel « Journ. f. d. r. u. a. Math. » Bd. 105, p. 267.

§ 6.

Metodo del sig. Lerch.

19. Un metodo analitico che somiglia al secondo metodo di Kronecker, si presenta nello studio della trascendente del sig. Lerch

$$\psi(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega} \left(x + \frac{i}{2} - iu\right)^2} \frac{dx}{1 + e^{2x\pi}},$$

le cui proprietà fondamentali sono state sviluppate in tre memorie differenti ¹⁾. È una trascendente intera rapporto ad u : rapporto alla variabile ω , si suppone dapprima che la sua parte immaginaria sia positiva; ma una modificazione del cammino lungo il quale si eseguisce l'integrale, fa vedere che la funzione resta sinettica ²⁾, se ω diviene reale. Quando ω prende dei valori razionali, $\psi(u, \omega)$ coincide colla funzione $F(u, \omega)$ che studieremo in questo paragrafo. La dimostrazione delle proprietà di $\psi(u, \omega)$ ci condurrebbe troppo in lungo, basterà di averle accennate, e passeremo senz'altro a sviluppare le proprietà della funzione $F(u, \omega)$, che può esser considerata indipendentemente da $\psi(u, \omega)$, come fa il sig. Lerch in un articolo pubblicato nei «*Mathematische Annalen*» T. 57.

20. Sia ω un numero reale e razionale, $\sqrt{\frac{\omega}{i}}$ il valore della radice quadrata avente la sua parte reale positiva; esiste una funzione univoca completamente definita dalle due equazioni

$$(1) \quad \begin{aligned} F(u+1) &= F(u) - i e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}} \\ F(u+\omega) &= e^{\pi i (2u+\omega)} F(u) + \sqrt{\frac{\omega}{i}}. \end{aligned}$$

Applicando n volte la trasformazione espressa dalla prima delle equa-

¹⁾ Memoires de l'Académie de Prague, — 1892 n.° 24, 1893, n.° 23 — Vortrag in der 66 Naturforscherversammlung in Wien.

²⁾ Egli conserva la denominazione di *sinettica*, introdotta da CAUCHY.

zioni (1), si ha

$$(2^a) \quad F(u+n) = F(u) - i \sum_{v=0}^{n-1} e^{\frac{\pi i}{\omega} (u+v)^2} \quad (n > 0);$$

scrivendo u in luogo di $u+n$, con una facile trasformazione si ottiene

$$(2^b) \quad F(u-n) = F(u) + i \sum_{v=1}^n e^{\frac{\pi i}{\omega} (u-v)^2}.$$

Dalla seconda delle (1) abbiamo invece

$$F(u+2\omega) = e^{\pi i(2u+3\omega)} F(u+\omega) + \sqrt{\frac{\omega}{i}} = e^{\pi i(4u+4\omega)} F(u) + \left\{ e^{\pi i(2u+3\omega)} + 1 \right\} \sqrt{\frac{\omega}{i}}$$

$$\begin{aligned} F(u+3\omega) &= e^{\pi i\{2(u+2\omega)+\omega\}} \left\{ e^{\pi i(4u+4\omega)} F(u) + (e^{\pi i(2u+3\omega)} + 1) \sqrt{\frac{\omega}{i}} \right\} + \sqrt{\frac{\omega}{i}} = \\ &= e^{\pi i\{6u+(1+3+5)\omega\}} F(u) + \left\{ e^{\pi i\{4u+(3+5)\omega\}} + e^{\pi i\{2u+5\omega\}} + 1 \right\} \sqrt{\frac{\omega}{i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u+4\omega) &= e^{\pi i\{8u+(1+3+5+7)\omega\}} F(u) + \\ &+ \left\{ e^{\pi i\{6u+(3+5+7)\omega\}} + e^{\pi i\{4u+(5+7)\omega\}} + e^{\pi i\{2u+7\omega\}} + 1 \right\} \sqrt{\frac{\omega}{i}}. \end{aligned}$$

Come si vede, $F(u+v\omega)$ si ottiene dal precedente moltiplicando tutto per $e^{\pi i\{2+(2v+1)\omega\}}$ ed aggiungendo $\sqrt{\frac{\omega}{i}}$, si potrà dunque scrivere

$$(2^c) \quad F(u+n\omega) = e^{n\pi i(2u+n\omega)} F(u) + \sqrt{\frac{\omega}{i}} \sum_{v=0}^{n-1} e^{2v u \pi i + (2n-v^2)\omega \pi i}.$$

In (2^b) e (2^c) come in (2^a) n è un numero positivo. — Scriviamo $F(u, \omega)$ invece di $F(u)$, e supponiamo ω positivo ed uguale a $\frac{\mu}{\lambda}$ (μ e λ essendo dei numeri interi); la funzione $F\left(u, \frac{\mu}{\lambda}\right)$ si calcola per mezzo

delle (2^a) e (2^c).

Infatti dalla (2^a), facendovi $n = \mu$ ($\mu > 0$)

$$F\left(u + \mu, \frac{\mu}{\lambda}\right) = F\left(u, \frac{\mu}{\lambda}\right) - i \sum_{v=0}^{\mu-1} e^{\frac{\lambda \pi i}{\mu} (u+v)^2},$$

e dalla (2^c), facendovi $n = \lambda$ ($\lambda > 0$)

$$F\left(u + \mu, \frac{\mu}{\lambda}\right) = e^{\frac{\lambda \pi i}{\lambda} (2u + \mu)} F\left(u, \frac{\mu}{\lambda}\right) + \sqrt{\frac{\mu}{i\lambda}} \sum_{v=0}^{\lambda-1} e^{2v u \pi i + \left(2\lambda v - v^2\right) \frac{\mu \pi i}{\lambda}},$$

da cui

$$\begin{aligned} (3^a) \quad \left(1 - (-1)^{\mu\lambda} e^{2u\lambda\pi i}\right) F\left(u, \frac{\mu}{\lambda}\right) &= i \sum_{v=0}^{\mu-1} e^{\frac{\lambda \pi i}{\mu} (u+v)^2} + \\ &+ \sqrt{\frac{\mu}{i\lambda}} \sum_{v=0}^{\lambda-1} e^{2v u \pi i - \frac{\mu \pi i}{\lambda} v^2}. \end{aligned}$$

Allo stesso modo per mezzo delle (2^b) e (2^c) si ha

$$\begin{aligned} (3^b) \quad \left(1 - (-1)^{\mu\lambda} e^{2u\lambda\pi i}\right) F\left(u, -\frac{\mu}{\lambda}\right) &= -i \sum_{v=1}^{\mu} e^{-\frac{\lambda \pi i}{\mu} (u-v)^2} + \\ &+ \sqrt{\frac{\mu}{i\lambda}} \sum_{v=0}^{\lambda-1} e^{2v u \pi i + \frac{\mu \pi i}{\lambda} v^2}. \end{aligned}$$

Di qui si vede che $F(u)$ è una funzione analitica univocamente determinata dalle (1). È intera, perchè rappresenta un caso particolare della trascendente intera $\psi(u, \omega)$; ma anche indipendentemente dalla conoscenza di $\psi(u, \omega)$ si deve poter dimostrare questa proprietà per una via più semplice. Nella dimostrazione che segue, ciò risulterà come conseguenza della reciprocità delle Somme di Gauss.

21. Se scriviamo u in luogo di $u + \omega$, e $u - \omega$ in luogo di u , la seconda

delle (1) ci dà $F(u - \omega) = \left(F\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) - \sqrt{\frac{\omega}{i}} \right) e^{-\pi i(2u - \omega)}$, e ponendo $u = \frac{v}{\omega}$, $\omega' = \frac{-1}{\omega}$

$$F\left(\frac{v+1}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = F(u - \omega', \omega') = \left(F\left(\frac{v}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) - \sqrt{\frac{i}{\omega}} \right) e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2v+1)},$$

egualmente

$$F\left(\frac{v+\omega}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = F(u+1, \omega') = F\left(\frac{v}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) - i e^{-\frac{v^2 \pi i}{\omega}}.$$

Per mezzo di queste due formole di trasformazione si vede subito che la funzione

$$\varphi(u) = i \sqrt{\frac{\omega}{i}} e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}} F\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) + \sqrt{\frac{\omega}{i}}$$

coincide con $F(u)$. Infatti

$$\begin{aligned} \varphi(u+1) &= i \sqrt{\frac{\omega}{i}} e^{\frac{(u+1)^2 \pi i}{\omega}} \left(F\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) - \sqrt{\frac{i}{\omega}} \right) e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2u+1)} + \\ &+ \sqrt{\frac{\omega}{i}} = i \sqrt{\frac{\omega}{i}} e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}} F\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) + \sqrt{\frac{\omega}{i}} - i e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}}, \end{aligned}$$

$$(4^a) \quad \varphi(u+1) = \varphi(u) - i e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}};$$

$$\begin{aligned} \varphi(u+\omega) &= i \sqrt{\frac{\omega}{i}} e^{\frac{(u+\omega)^2 \pi i}{\omega}} \left(F\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) - i e^{-\frac{u^2 \pi i}{\omega}} \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{\omega}{i}} = \left(i \sqrt{\frac{\omega}{i}} e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}} F\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) + \sqrt{\frac{\omega}{i}} \right) e^{(2u+\omega)\pi i} + \sqrt{\frac{\omega}{i}}, \end{aligned}$$

$$(4^b) \quad \varphi(u+\omega) = e^{\pi i(2u+\omega)} \varphi(u) + \sqrt{\frac{\omega}{i}}.$$

Le equazioni (4^a) e (4^b) identiche colle (1) permettono di concludere per quanto abbiamo dimostrato al numero 20,

$$(5) \quad F(u, \omega) = i \sqrt{\frac{\omega}{i}} e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}} F\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) + \sqrt{\frac{\omega}{i}}.$$

Si vede anche facilmente che la funzione

$$\sqrt{\frac{\omega}{i}} - F(1-u, \omega) = \phi(u)$$

ha le medesime proprietà. E in vero

$$\phi(u+1) = \sqrt{\frac{\omega}{i}} - F(-u, \omega),$$

e siccome per la (2^b)

$$F(-u, \omega) = F(-(u-1), \omega) + i e^{\frac{\pi i}{\omega} \{-(u-1)-1\}^2} = F(1-u, \omega) - i e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}},$$

$$(6^a) \quad \phi(u+1) = \phi(u) - i e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}};$$

$$\text{inoltre rammentando che } F(u-\omega) = \left(F(u) - \sqrt{\frac{\omega}{i}}\right) e^{-\pi i(2u-\omega)},$$

$$\begin{aligned} \phi(u+\omega) &= \sqrt{\frac{\omega}{i}} - F(1-u-\omega, \omega) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{\omega}{i}} - F(1-u, \omega)\right) e^{-\pi i \{2(1-u)-\omega\}} + \sqrt{\frac{\omega}{i}}, \end{aligned}$$

$$(6^b) \quad \phi(u+\omega) = e^{\pi i(2u+\omega)} \phi(u) + \sqrt{\frac{\omega}{i}};$$

le (6^a) e (6^b) ci permettono di concludere che $\phi(u) = F(u)$, e quindi

$$(7) \quad F(u, \omega) + F(1-u, \omega) = \sqrt{\frac{\omega}{i}};$$

e poichè dalla prima delle (1) risulta $F(1-u) = F(-u) - i e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}}$, la

(7) ci dà

$$(8) \quad F(u, \omega) + F(-u, \omega) = i e^{\frac{u^2 \pi i}{\omega}} + \sqrt{\frac{\omega}{i}}.$$

21. Se si suppone che $F(u, \omega)$ resti finita per $u=0$, e per $u=\frac{1}{2}$, dalle (7) ed (8) si deducono i valori speciali

$$F\left(\frac{1}{2}, \omega\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{i}}$$

$$F(0, \omega) = \frac{1}{2} \left(i + \sqrt{\frac{\omega}{i}} \right) :$$

la formola (3^a), per $u=0$ ci porta all'equazione

$$(9) \quad \frac{1 - (-1)^{\lambda \mu}}{2} \left(i + \sqrt{\frac{\mu}{i \lambda}} \right) = i \sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{\frac{\lambda \pi i}{\mu} \nu^2} + \sqrt{\frac{\mu}{i \lambda}} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} e^{-\frac{\mu \pi i}{\lambda} \nu^2}.$$

Quando $\lambda \mu$ è impari, la (9) diviene un'identità, perchè i termini delle due somme si distruggono due a due, e restano quelli che rispondono a $\nu=0$: quando il prodotto $\lambda \mu$ è pari, si ha l'importante equazione

$$i \sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{\frac{\lambda \pi i}{\mu} \nu^2} + \sqrt{\frac{\mu}{i \lambda}} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} e^{-\frac{\mu \pi i}{\lambda} \nu^2} = 0$$

che si scrive sotto la forma

$$(10) \quad \sqrt{\frac{i \mu}{\lambda}} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} e^{-\frac{\nu^2 \pi i}{\lambda}} = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{\frac{\nu^2 \lambda \pi i}{\mu}} \quad \left(\begin{array}{l} \lambda \mu \equiv 0 \pmod{2} \\ \lambda > 0, \mu > 0 \end{array} \right)$$

ed esprime la legge di reciprocità delle Somme di Gauss. Che la parte reale di $\sqrt{\frac{i \mu}{\lambda}}$ debba esser positiva, risulta dalla convenzione fatta al numero 20, del resto non istiamo a ripetere qui ciò che è stato detto altrove a proposito di questa legge.

23. Vediamo ora come si dimostra che $F(u)$ è una trascendente intera. Le (2^a), (2^b), (2^c) dimostrano che, se $F(u)$ è finita per $u=u_0$, lo è

anche per $u = u_0 + \frac{n}{\lambda}$, ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Ora per $\lambda\mu$ pari, dalla (3^a)

risulta che $F\left(u, \frac{\mu}{\lambda}\right)$ può avere dei poli soltanto nei punti $u = 0$, $u = \frac{\lambda\mu + h}{\lambda}$

con $h = 0, \pm 1, 2, \dots$ e sarà sufficiente di prendere h fino a $\pm(\lambda - 1)$.

Il valore della funzione in questi punti diviene infinito soltanto, se la funzione diviene tale per $u = 0$, basterà quindi osservare come si comporta $F\left(0, \frac{\mu}{\lambda}\right)$.

In questo punto il secondo membro della (3^a) diviene nullo

a causa della legge di reciprocità di Cauchy e Kronecker, quindi $F\left(0, \frac{\mu}{\lambda}\right)$

è finita, e per $\lambda\mu$ pari, $F\left(u, \frac{\mu}{\lambda}\right)$ è una trascendente intera.

In una maniera simile si ragiona per $\lambda\mu$ impari. Solamente in questo caso il punto che conviene studiare è $u = \frac{1}{2}$, e la forma che prende allora il secondo membro è

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{(2\nu+1)^2 \frac{\lambda\pi i}{4\mu}} + \sqrt{\frac{\mu}{i\lambda}} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^\nu e^{-\nu^2 \frac{\mu\pi i}{\lambda}}.$$

La semplicità con la quale sono state dimostrate le altre proprietà, fa intravedere che si deve poter riuscire a dimostrare indipendentemente dalle Somme di Gauss, e per una via elementare, che $F(u)$ è una trascendente intera. Il metodo che abbiamo esposto, sarà allora il più semplice per arrivare alle Somme di Gauss.

CAPITOLO II

Sviluppi Aritmetici

§. 1.

Diverse proprietà delle Somme $G(\lambda, \mu)$. Il caso di μ primo.

24. Abbiamo dimostrato in più maniere la formola (II) del numero 1 : abbiamo inoltre stabilito (numero 6 form. (12)) per il caso di λ e μ primi fra loro

$$(1) \quad G(\lambda, \mu) \begin{cases} = 0, & \text{quando } \lambda \mu \equiv 1 \pmod{2}. \\ = \sum_{k=0}^{|\mu|-1} e^{\frac{k^2 \lambda \pi i}{\mu}}, & \text{quando } \lambda \mu \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Per esprimere che λ e μ sono primi fra loro, useremo il simbolo $(\lambda, \mu) \sim 1$. I casi dei quali ora ci occuperemo, sono quelli in cui $(\lambda, \mu) \sim 1$, e contemporaneamente $\lambda \mu \equiv 0 \pmod{2}$.

Dalla definizione risulta che, rappresentando con h un numero intero positivo o negativo,

$$(2) \quad G(\lambda, \mu) = G(\lambda + 2\mu h, \mu).$$

Sia ora h un intiero tale che $(h, 2\mu) \sim 1$: nella somma

$$G(\lambda h^2, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{|2\mu|-1} e^{(h h)^2 \frac{\lambda \pi i}{\mu}}$$

kh percorre un sistema completo di resti rapporto al modulo 2μ : dunque il valore di questa somma è uguale a quello della somma $G(\lambda, \mu)$,

e si ha

$$(3) \quad G(\lambda h^2, \mu) = G(\lambda, \mu); \quad ((h, 2\mu) \sim 1).$$

Eguualmente si vede che per $(h, \mu) \sim 1$ e μ impari

$$(4) \quad G(2\lambda h^2, \mu) = G(2\lambda, \mu),$$

ed in fine per $s \equiv t \pmod{\mu}$ e μ impari,

$$(5) \quad G(2s\lambda, \mu) = G(2t\lambda, \mu).$$

25. Ciò premesso, sia $\mu = p$ un numero primo impari positivo: sappiamo che vi sono $\frac{p-1}{2}$ residui quadratici del numero p , e li chiameremo a ; parimente vi sono $\frac{p-1}{2}$ non residui, che noi chiameremo b . Dato un residuo a , si può risolvere la congruenza $n^2 \equiv a \pmod{p}$, ove n è primo col modulo come a . Applicando le formole (5) e (3), si ha

$$G(2a\lambda, p) = G(2n^2\lambda, p),$$

$$G(2n^2\lambda, p) = G(2\lambda, p);$$

dunque, quando a è un residuo,

$$(6) \quad G(2a\lambda, p) = G(2\lambda, p).$$

Sia b un non-residuo qualunque, e β un non-residuo particolare, $b\beta$ è un residuo, e si può risolvere la congruenza $n^2 \equiv b\beta \pmod{p}$. Inoltre β essendo una costante, determino β' in maniera che si abbia $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{p}$. Moltiplicando per β' si avrà

$$\beta'n^2 \equiv b \pmod{p},$$

$$(7) \quad G(2b\lambda, p) = G(2\beta'\lambda, p);$$

d'onde si vede che la somma conserva un medesimo valore per tutti i non residui.

26. Si può ora supporre $\lambda = 1$, perchè ciò non toglie nulla alla generalità delle dimostrazioni. Rappresentiamo inoltre con A la somma $G(2h, p)$, quando h è un residuo quadratico del numero p ; e con B la medesima

somma, quando h è un non-residuo. Ciò posto calcoliamo $\sum_{h=1}^{p-1} G(2h, p)$, che evidentemente è uguale a $\frac{p-1}{2}A + \frac{p-1}{2}B$, e che d'altra parte ci dà

$$\sum_{h=1}^{p-1} G(2h, p) = \sum_{h=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} e^{-k^2 \frac{2h\pi i}{p}} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{h=1}^{p-1} e^{-k^2 \frac{2h\pi i}{p}} :$$

essendo

$$\sum_{h=1}^{p-1} e^{-k^2 \frac{2h\pi i}{p}} \begin{cases} = p-1, & \text{quando } k=0 \\ = -1, & \text{quando } k \neq 0 \end{cases}$$

si ha

$$\sum_{h=1}^{p-1} G(2h, p) = 0,$$

da cui si conchiude

$$A + B = 0$$

ossia

$$(8) \quad G(2b, p) = -G(2a, p).$$

Le formole (6) e (8) possono ridursi sotto l'unica formola

$$(9) \quad G(2h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) G(2, p), \quad (p > 0)$$

ove $\left(\frac{h}{p}\right)$ è il simbolo di Legendre, che rappresenta l'unità positiva, quando h è residuo quadratico di p ; l'unità negativa, quando h è non-residuo ¹⁾. È evidente che per $(\lambda, p) \sim 1$, si ha

$$G(2h\lambda, p) = \left(\frac{h}{p}\right) G(2\lambda, p).$$

27. Nella somma $G(\lambda, \mu\nu)$, μ e ν sieno primi fra loro, λ sia un nu-

¹⁾ LEGENDRE. *Théorie des nombres*, 3^{me} édit. pag. 197.

mero pari e primo con $\mu\nu$; come sappiamo

$$G(\lambda, \mu\nu) = \sum_{k=0}^{|\mu\nu|-1} e^{-k^2 \frac{\lambda\pi i}{\mu\nu}},$$

e si può prendere, invece dei valori indicati di k , un sistema qualunque completo di resti, p. e. $k = \mu r + \nu s$ ($r=0, 1, 2, \dots, |\nu|-1$; $s=0, 1, 2, \dots, |\mu|-1$). Mentre che r ed s percorrono rispettivamente i sistemi di resti rapporto ai moduli ν e μ , k prende $\mu\nu$ valori incongrui fra loro rispetto al modulo $\mu\nu$; e si ha

$$G(\lambda, \mu\nu) = \sum_{r,s} e^{-r^2 \frac{\lambda\mu\pi i}{\nu} - s^2 \frac{\lambda\nu\pi i}{\mu}} = \left(\sum_{r=0}^{|\nu|-1} e^{-r^2 \frac{\lambda\mu\pi i}{\nu}} \right) \left(\sum_{s=0}^{|\mu|-1} e^{-s^2 \frac{\lambda\nu\pi i}{\mu}} \right)$$

cioè, per μ e ν impari, λ pari e primo con $\mu\nu$,

$$(10) \quad G(\lambda, \mu\nu) = G(\lambda\mu, \nu) G(\lambda\nu, \mu).$$

Se invece di λ , si supponeva che μ o ν fosse pari, si arrivava alla medesima conclusione, così che la (10) ha luogo ogni volta che μ e ν sono primi fra loro e con λ , ed il prodotto $\lambda\mu\nu$ è pari. Questa formola è detta formola di *composizione*, e ci permette di decomporre le Somme di Gauss,

¹⁾ Se ci fossero due coppie di valori r', r'' ; s', s'' che dessero i due corrispondenti valori di k tali da soddisfare alla congruenza

$$\mu r' + \nu s' \equiv \mu r'' + \nu s'' \pmod{\mu\nu},$$

si avrebbe pure

$$\mu r' \equiv \mu r'' \pmod{\nu}, \quad \nu s' \equiv \nu s'' \pmod{\mu};$$

e poichè μ e ν sono primi fra loro, dovrebbe essere

$$r' \equiv r'' \pmod{\nu}, \quad s' \equiv s'' \pmod{\mu},$$

ciò che è contro l'ipotesi, perchè r ed s percorrono rispettivamente dei valori incongrui rapporto ai moduli ν e μ . La formula $\mu r + \nu s$ ci dà dunque tutte le classi differenti del modulo $\mu\nu$, quando $(\mu, \nu) \sim 1$.

secondo i fattori del denominatore. L'estensione al caso di tre, quattro ecc. fattori è evidente.

28. Si può facilmente calcolare il valore della somma $G(2, p)$ della formula (9). È questa appunto la somma di cui Gauss si occupò per primo: noi la calcoleremo applicando la legge di reciprocità (numero 1, II). Abbiamo

$$G(2, p) \sqrt{\frac{2i}{p}} = G(-p, 2) = 1 + i^p,$$

da cui

$$G(2, p) = \frac{1 + i^p}{1 + i} \sqrt{p};$$

ma

$$\frac{1 + i^p}{1 + i} \begin{cases} = 1, & \text{quando } p \equiv 1 \pmod{4} \\ = -i, & \text{quando } p \equiv -1 \pmod{4} \end{cases} = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2},$$

dunque

$$(11) \quad G(2, p) = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

ove $\sqrt{p}$ è preso col segno positivo. Scrivendo la somma invece del simbolo

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{-k^2 \frac{2\pi i}{p}} = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

e prendendo i valori coniugati, si ha l'altra formola più elegante

$$(12) \quad \sum_{k=0}^{p-1} e^{k^2 \frac{2\pi i}{p}} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p};$$

sostituiamo nella (9), ed avremo

$$(13) \quad G(2h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p};$$

parimente

$$(14) \quad G(-2h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{-p}.$$

Queste due formole ci danno il valore delle somme di Gauss per il caso del denominatore μ primo, impari e positivo e dell'argomento λ pari.

§ 2.

La legge di reciprocità di Legendre.

29. Sia p un numero primo, positivo, impari; abbiamo

$$G(2\lambda, p) \sqrt{\frac{2\lambda i}{p}} = G(-p, 2\lambda),$$

e per il teorema di composizione (num. 27)

$$G(-p, 2\lambda) = G(-2p, \lambda) G(-\lambda p, 2).$$

Quando λ è impari, $G(-\lambda p, 2) = 1 + i^{\lambda p}$; supponiamo di più λ uguale ad un numero primo $q \neq p$ e positivo, allora nell'equazione

$$(1) \quad G(2q, p) \sqrt{\frac{2qi}{p}} = (1 + i^{pq}) G(-2p, q)$$

avremo per le (12) e (13) del paragrafo precedente

$$G(2q, p) = \left(\frac{q}{p}\right) (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{-p}, \quad G(-2p, q) = \left(\frac{p}{q}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{-q},$$

e sostituendo questi valori in (1), e notando che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1$, $\sqrt{2i} = 1 + i$;

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1 + i^{pq}}{1 + i} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

Ora per

$$pq \equiv 1 \pmod{4}, \text{ e } p \equiv q \equiv 1 \pmod{4}, \quad \frac{1+i^{pq}}{1+i} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{»} & \text{»} & p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}, & \text{»} & \text{»} & \text{»} & = -1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} \\ (-1) \end{array} \right.$$

$$pq \equiv -1 \pmod{4}, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 1$$

si può dunque scrivere

$$(2) \quad \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

ove p e q sono dei numeri primi impari, e positivi. È questa la formola che esprime il più importante teorema sui residui quadratici, il *teorema di reciprocità*.

3.° Quando in seguito vorremo richiamare la legge espressa dalla formola (2), la diremo « *legge di reciprocità di Legendre* ». Essa oltre al costituire uno dei più bei teoremi della teoria dei residui quadratici, ha una grande importanza in molti capitoli dell'aritmetica superiore. Il teorema fu enunciato per la prima volta da Eulero ¹⁾; ma fu messo sotto la forma elegante (2), e dimostrato in parte da Legendre ²⁾, che lo scoperse indipendentemente da Eulero. Per altro fu Gauss ³⁾ che ne diede non una,

¹⁾ *Theoremata circa divisores numerorum in hac forma $pa^2 + qb^2$ contentorum*. Comm. Ac. Petrop. 1744-46 p. 151, od anche Comm. Ar. coll. 1, p. 35. — *Novae demonstrationes circa divisores numerorum formae $x^2 + ny^2$* . N. Act. Petrop. 1775 p. 47. — *De criteriis aequationis $fx^2 + gy^2 = hz^2$* . Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos. Opusc. anal. 1783.

²⁾ *Recherches d'analyse indéterminée* (Hist. de l'Acad. de Paris 1785 p. 465).

³⁾ La prima (*Disq. Arith.* art. 135-145; 1801 (1796)) è quella del metodo dell'induzione completa; la seconda (*Disq. Arith.* art. 157-262; 1801) è quella che si fonda sulla teoria delle forme quadratiche; la terza (*Theorematis arith. dem. nova* W. II p. 3, 1808) usa il metodo di riduzione; la quarta (*Summatio etc.* W. II p. 9; 1808) si serve della teoria della divisione del cerchio; la quinta (*Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliaciones novae* W. II p. 47) con un procedimento differente dalla terza, si basa sul metodo di riduzione la sesta (*Theorematis fundamentalis in theoria residuorum quadratic. demonstr. sexta* W. II, 55) applica la teoria della divisione del cerchio in una maniera differente dalla quarta; la settima (opere postume — W. II p. 233) applica la teoria delle congruenze.

ma ben sette dimostrazioni differenti e rigorose. Dopo di lui le dimostrazioni si son moltiplicate, e ne abbiamo oggi una quantità considerevole, fra le quali la più semplice è quella di Zeller ¹⁾, la più originale quella pubblicata da Eisenstein nel 1845 ²⁾, Bachmann ³⁾ nella « *Niedere Zahlentheorie* » (Leipzig 1902) a pag. 202-204 dà una tavola cronologica di tutte le dimostrazioni di questa legge, le quali non escono dal dominio del suo libro. Considerate per altro nella loro sostanza, si posson ridurre a poche categorie. Una bella esposizione storico-sintetica di tali dimostrazioni è stata fatta dal Dott. Osvaldo Baumgart nel *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 1885, e pubblicata a parte pei tipi del Teubner a Lipsia.

31. Riprendiamo la formola (13) del paragrafo precedente, e cangiamo il segno di h ; avremo

$$G(-2h, p) = \left(\frac{-h}{p}\right) (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} :$$

confrontandola colla (14) del medesimo numero si ottiene per $h=1$

$$(3) \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

formola ben nota nella teoria dei numeri. — Per $h=2$

$$(4) \quad G(4, p) = \left(\frac{2}{p}\right) (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

ed applicando la legge di reciprocità

$$G(4, p) = \sqrt{\frac{p}{4i}} G(-p, 4);$$

¹⁾ Berliner Monatsb. 1872 p. 846.

²⁾ *Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendente*. Crelle 29.

³⁾ Ved. anche KRONECKER, *Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes*. Berl. Monatsber. 1875 p. 267.

ma

$$G(-p, 4) = \sum_{k=0}^3 e^{\frac{k^2 p \pi i}{4}} = 1 + 2(\sqrt{i})^p + (-1)^p = 2(\sqrt{i})^p,$$

se pertanto sostituiamo nella formola precedente, abbiamo

$$(5) \quad G(4, p) = i^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{p}.$$

Confrontando le (4) e (5) abbiamo di nuovo una formola nota della teoria dei numeri, cioè $\left(\frac{2}{p}\right) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \frac{p-1}{2}}$, ossia

$$(6) \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Queste formole, sarà bene ripeterlo ancora una volta, sono qui dimostrate per p , primo impari e positivo.

§. 3.

a) Le Somme di Gauss nel caso generale. — Il Simbolo di Jacobi.

32. Sia λ un numero pari qualunque, e μ un intiero legato dalla condizione $(\lambda, \mu) \sim 1$. Supponiamo che μ contenga un divisore q ad una potenza più grande dell'unità, si potrà scrivere $\mu = m q^2$; per la legge di reciprocità fra le Somme di Gauss

$$G(\lambda, m q^2) \sqrt{\frac{\lambda i}{m q^2}} = G(-m q^2, \lambda);$$

per la (3) del numero 24, quando $(q, 2\mu) \sim 1$, condizione che nel nostro caso è verificata,

$$G(-m q^2, \lambda) = G(-m, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda i}{m}} G(\lambda, m),$$

dunque

$$(1) \quad G(\lambda, mq^2) = q G(\lambda, m).$$

Così si può trasportare a fattore un numero che figura nell'argomento μ a una potenza pari, e far in modo che questo finisca per esser composto soltanto di fattori primi differenti.

Facciamo $\mu = m^2$, con $m = p_1 p_2 \dots p_\omega$, e $p_1, p_2, \dots, p_\omega$ sieno numeri primi differenti fra loro e positivi. Per quanto è stato dimostrato precedentemente il caso di $G(\lambda, \mu)$, è ridotto allo studio di $G(\lambda, m)$. Per il teorema di *composizione* (num. 27),

$$G(\lambda, m) = G(\lambda p_2 p_3 \dots p_\omega, p_1) G(\lambda p_1 p_3 \dots p_\omega, p_2) \dots G(\lambda p_1 p_2 \dots p_{\omega-1}, p_\omega)$$

$$\text{e, ponendo } m_1 = \frac{m}{p_1}, m_2 = \frac{m}{p_2}, \dots, m_\omega = \frac{m}{p_\omega}.$$

$$(2) \quad G(\lambda, m) = G(\lambda m_1, p_1) G(\lambda m_2, p_2) \dots G(\lambda m_\omega, p_\omega).$$

Abbiamo supposto λ pari qualunque; rappresentiamolo con $-2h$: se con α rappresentiamo un intero compreso fra 1 ed ω , per la (14) del num. 28, avremo:

$$G(-2hm_\alpha, p_\alpha) = \left(\frac{hm_\alpha}{p_\alpha}\right) i^{\left(\frac{p_\alpha-1}{2}\right)^2} \sqrt{p_\alpha}.$$

$$\text{Per } p_\alpha \equiv 1 \pmod{4} \quad i^{\left(\frac{p_\alpha-1}{2}\right)^2} = 1; \quad \text{per } p_\alpha \equiv -1 \pmod{4},$$

$$i^{\left(\frac{p_\alpha-1}{2}\right)^2} = i; \text{ i due casi possono esser riuniti nell'unica formola}$$

$$G(-2hm_\alpha, p_\alpha) = \left(\frac{hm_\alpha}{p_\alpha}\right) \sqrt{(-1)^{\frac{p_\alpha-1}{2}} p_\alpha}$$

ove $\sqrt{-p_\alpha}$ sta in luogo di $i\sqrt{p_\alpha}$, con $\sqrt{p_\alpha} > 0$. La formola (2) ci dà così

$$(3) \quad G(-2h, m) = \prod_{\alpha=1}^{\omega} \left(\frac{hm_\alpha}{p_\alpha} \right) \prod_{\alpha=1}^{\omega} \sqrt{(-1)^{\frac{p_\alpha-1}{2}} p_\alpha}.$$

33. Dalla definizione del simbolo di Legendre¹⁾ risulta che

$$(4) \quad \left(\frac{hm_\alpha}{p_\alpha} \right) = \left(\frac{h}{p_\alpha} \right) \left(\frac{m_\alpha}{p_\alpha} \right);$$

inoltre, se si decompone il numero impari P nei suoi fattori primi $p_1 p_2 \dots$, porremo secondo Jacobi²⁾

$$(5) \quad \left(\frac{m}{P} \right) = \left(\frac{m}{p_1} \right) \left(\frac{m}{p_2} \right) \dots,$$

ove il simbolo $\left(\frac{m}{P} \right)$ è uguale all'unità positiva, o negativa, secondochè il numero dei fattori primi $p_1, p_2, \dots$ di cui m è non-residuo è pari o impari.

Applicando dunque il simbolo di Jacobi

$$(6) \quad \prod_{\alpha=1}^{\omega} \left(\frac{h}{p_\alpha} \right) = \left(\frac{h}{m} \right),$$

e per mezzo delle (4) e (6) la (3) ci dà

$$(7) \quad G(-2h, m) = \left(\frac{h}{m} \right) \prod_{\alpha=1}^{\omega} \left(\frac{m_\alpha}{p_\alpha} \right) \prod_{\alpha=1}^{\omega} \sqrt{(-1)^{\frac{p_\alpha-1}{2}} p_\alpha}.$$

¹⁾ Infatti quanto $a, b, c, \dots$ sono degli interi non divisibili pel numero primo p , si ha $\left(\frac{abc\dots}{p} \right) \equiv (abc\dots)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$; ma $(abc\dots)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} c^{\frac{p-1}{2}} \dots$, e $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p} \right) \pmod{p}$; $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{b}{p} \right) \pmod{p}$ ecc.; è dunque $\left(\frac{abc\dots}{p} \right) = \left(\frac{a}{p} \right) \left(\frac{b}{p} \right) \left(\frac{c}{p} \right) \dots$

²⁾ Monatsbericht der Berliner Akademie 1837 (Crelle 30).

34. Rammentiamo che $m_\alpha = p_1 \dots p_{\alpha-1} p_{\alpha+1} p_{\alpha+2} \dots p_\omega$, e facciamo

$$\left(\frac{m_\alpha}{p_\alpha}\right) = \prod_{\beta} \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right) \quad (\beta \neq \alpha)$$

ove β prende tutti i valori da 1 ad ω , eccettuato il valore di α . Si avrà pertanto

$$\prod_{\alpha=1}^{\omega} \left(\frac{m_\alpha}{p_\alpha}\right) = \prod_{\alpha} \prod_{\beta} \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots \dots \omega \\ \beta = 1, 2, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots \omega \end{array}\right)$$

o, più brevemente

$$\prod_{\alpha=1}^{\omega} \left(\frac{m_\alpha}{p_\alpha}\right) = \prod_{\alpha < \beta} \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right).$$

In questo prodotto, per ogni fattore $\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)$ c'è il suo corrispondente $\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)$; si possono riunire in coppie, introducendo per il prodotto la condizione $\alpha > \beta$. Ad ognuna di queste coppie si può applicare la formula (2) del num. 29; si avrà

$$\prod_{\alpha=1}^{\omega} \left(\frac{m_\alpha}{p_\alpha}\right) = \prod_{\alpha > \beta} (-1)^{\frac{p_\alpha-1}{2} \cdot \frac{p_\beta-1}{2}}.$$

Qui si ottiene un fattore negativo soltanto quando p_α e p_β sono contemporaneamente $\equiv -1 \pmod{4}$: si rappresenti con τ il numero dei fattori primi di m che soddisfano alla detta congruenza; sono essi che combinati due a due danno luogo a $\frac{\tau(\tau-1)}{2}$ fattori eguali a -1 nell'ultimo prodotto, così che

$$(8) \quad \prod_{\alpha=1}^{\omega} \left(\frac{m_\alpha}{p_\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

Separiamo in $\prod_{\alpha=1}^{\omega} \sqrt[(-1)^{\frac{p_{\alpha}-1}{2}}]{p_{\alpha}}$ i τ fattori immaginari $\sqrt{-1}$; ciò che resta sotto il segno, sarà tutto positivo, ed avremo

$$(9) \quad \prod_{\alpha=1}^{\omega} \sqrt[(-1)^{\frac{p_{\alpha}-1}{2}}]{p_{\alpha}} = i^{\tau} \prod_{\alpha=1}^{\omega} \sqrt{p_{\alpha}} = i^{\tau} \sqrt{m}.$$

Sostituendo nella (7) i valori dati dalle (8) e (9),

$$G(-2h, m) = \left(\frac{h}{m}\right) i^{\tau^2} \sqrt{m};$$

e poichè τ rappresenta il numero dei fattori primi di m , che sono $\equiv -1 \pmod{4}$

quando $\tau \equiv 0 \pmod{2}$, è contemporaneamente $m \equiv 1 \pmod{4}$

$$\text{ed} \quad i^{\tau^2} \sqrt{m} = \sqrt{m};$$

quando $\tau \equiv 1 \pmod{2}$, è contemporaneamente $m \equiv -1 \pmod{4}$

$$\text{ed} \quad i^{\tau^2} \sqrt{m} = i \sqrt{m};$$

dunque si potrà scrivere

$$(10) \quad G(-2h, m) = \left(\frac{h}{m}\right) \sqrt[(-1)^{\frac{m-1}{2}}]{m},$$

ove sarà $\sqrt{-m} = i \sqrt{m}$, con $\sqrt{m} > 0$.

35. Riprendiamo il numero $\mu = m n^2$, con n intero qualunque, m intero positivo, impari, composto di fattori primi differenti fra loro, ed in fine sia $(2h, \mu) \sim 1$. Si avrà

$$G(-2h, \mu) = n G(-2h, m) = \left(\frac{h}{m}\right) n \sqrt[(-1)^{\frac{m-1}{2}}]{m}.$$

Il quadrato di un numero impari essendo sempre $\equiv 1 \pmod{4}$ si

hanno le congruenze

$$mn^2 \equiv m \pmod{4}; \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{\mu-1}{2}}; \quad \left(\frac{h}{n^2}\right) = 1; \quad \left(\frac{h}{m}\right) = \left(\frac{h}{\mu}\right),$$

dalle quali si conclude

$$(11) \quad G(-2h, \mu) = \left(\frac{h}{\mu}\right) \sqrt{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}} \mu$$

per μ impari, positivo, qualunque e primo con $2h$.

b) Generalizzazione dei Simboli.

36. Secondo il simbolo di Legendre generalizzato da Jacobi, quando $P = p_1 p_2 \dots$ e ciascuno dei suoi divisori è positivo,

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = \prod_a \left(\frac{-1}{p_a}\right) = (-1)^{\sum \frac{p_a-1}{2}}:$$

supponiamo che tra i fattori di P ce ne sieno τ congrui all'unità negativa rispetto al modulo 4; allora

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^\tau,$$

ora si ha per mod. 4

$$(12) \quad P \begin{cases} \equiv 1, & \text{quando } \tau \text{ è pari} \\ \equiv -1, & \text{quando } \tau \text{ è impari} \end{cases}$$

da cui

$$(13) \quad (-1)^\tau = (-1)^{\frac{P-1}{2}} \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}.$$

Parimente per P impari e positivo, rammentando la (6) del num. 31,

$$\left(\frac{2}{P}\right) = \prod \left(\frac{2}{p_\alpha}\right) = \prod (-1)^{\frac{p_\alpha^2 - 1}{8}} = (-1)^{\sum \frac{p_\alpha^2 - 1}{8}};$$

ed essendo le p_α degli interi impari, i loro quadrati avran la forma $8k + 1$; $8k_2 + 1 \dots$; da cui $\frac{p_1^2 - 1}{8} = k_1$; $\frac{p_2^2 - 1}{8} = k_2$; $\dots$

$$P^2 = (8k_1 + 1)(8k_2 + 1) \dots \equiv 1 + 8(k_1 + k_2 + \dots) \pmod{64}$$

$$\frac{P^2 - 1}{8} \equiv k_1 + k_2 + \dots \pmod{8}$$

$$(-1)^{\sum \frac{p_\alpha - 1}{2}} = (-1)^{\sum k_\alpha} = (-1)^{\frac{P^2 - 1}{8}},$$

ed in fine

$$(14) \quad \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2 - 1}{8}}.$$

In questa formola come nella (13) è evidente che P deve essere impari, altrimenti il secondo membro sarebbe immaginario. Ora le formole (3) e (6) del num. 31 sono estese al caso di P positivo, intero qualunque.

37. Sieno P e Q due numeri positivi, impari, primi fra loro, rispettivamente uguali a $\prod p_\alpha$, il q_β ove i p_α ed i q_β sono degli interi positivi, primi impari, fra loro uguali o differenti: per definizione

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \prod \left(\frac{P}{q_\beta}\right) = \prod_{p_\alpha, q_\beta} \left(\frac{p_\alpha}{q_\beta}\right)$$

e similmente

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = \prod_{q_\beta, p_\alpha} \left(\frac{q_\beta}{p_\alpha}\right).$$

Applicando la formola di Legendre, (2) del num. 29, alle coppie

$$\left(\frac{p_\alpha}{q_\beta}\right) \left(\frac{q_\beta}{p_\alpha}\right)$$

$$(15) \left(\frac{P}{Q}\right) \left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\sum p_\alpha, q_\beta \frac{p_\alpha-1}{2} \cdot \frac{q_\beta-1}{2}} = (-1)^{\sum \frac{p_\alpha-1}{2} \sum \frac{q_\beta-1}{2}};$$

ora, quando il numero dei fattori p_α che sono $\equiv -1 \pmod{4}$ è pari, è $P \equiv 1 \pmod{4}$ per la (12), ed in questo caso

$$\sum \frac{p_\alpha-1}{2} \equiv \frac{P-1}{2} \pmod{2} :$$

quando il numero dei fattori p_α che sono $\equiv -1 \pmod{4}$ è impari, $P \equiv -1 \pmod{4}$, ed anche questa volta

$$\sum \frac{p_\alpha-1}{2} \equiv \frac{P-1}{2} \pmod{2} :$$

il medesimo ragionamento si può ripetere per Q : dunque sostituendo nella (15)

$$(16) \left(\frac{P}{Q}\right) \left(\frac{Q}{P}\right) \equiv (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2}}.$$

La legge di *reciprocità di Legendre* è così estesa ai numeri P e Q che soddisfano alle condizioni $P > 0$, $Q > 0$, $PQ \equiv 1 \pmod{2}$ ($P, Q \sim 1$).

38. Per poter generalizzare ancor più si introduce la convenzione che si possa cangiare il segno al denominatore del simbolo, cioè si fa

$$\left(\frac{P}{-Q}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right).$$

Supponiamo che Q sia negativo, e lasciamo del resto per P e Q le medesime condizioni del num. precedente: facciamo $P = m$, $Q = -n$, e m ed n sieno essenzialmente positivi. Il simbolo di Legendre generaliz-

zato ci dà

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{P}{-Q}\right)\left(\frac{-Q}{P}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{-1}{-P}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right)$$

da cui

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{-n-1}{2}},$$

e sostituendo P e Q ad m e $-n$ si ha anche in questo caso la formola di Legendre

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2}}.$$

Il ragionamento sarebbe stato il medesimo, se si supponeva $P < 0$ e $Q > 0$.

Supponiamo ora che P e Q sieno tutti e due negativi, restando nel resto le medesime condizioni che precedentemente: poniamo $P = -m$, $Q = -n$, m ed n essendo degli interi positivi. Per definizione si può cambiare il segno del denominatore, dunque

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{-P}{Q}\right)\left(\frac{-Q}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{-1}{Q}\right)\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{-1}{m}\right)\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right)$$

d'onde

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) &= \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) (-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}} = \\ &= (-1)^{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} - 1} = (-1)^{\frac{-m-1}{2} \cdot \frac{-n-1}{2} + 1} \end{aligned}$$

e sostituendo P e Q a $-m$ e $-n$

$$(17) \quad \left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2} + 1} \quad (P < 0, Q < 0)$$

Dunque quando i due numeri sono negativi, la legge di reciprocità cambia, e nella sua espressione algebrica bisogna prendere il secondo membro col segno contrario.

Rappresentiamo col simbolo $\text{sgn } a$ l'unità positiva o negativa, secondochè a stessa è una quantità positiva o negativa, e sia $\text{sgn } a = \frac{a}{|a|}$: con questa convenzione possiamo riunire i tre casi nell'unica formola

$$(18) \quad \left(\frac{P}{Q}\right) \left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2} + \frac{1-\text{sgn } P}{2} \cdot \frac{1-\text{sgn } Q}{2}} \quad (P, Q) \sim 1.$$

In fine ponendo la convenzione che sia $\left(\frac{P}{Q}\right) = 0$, quando non è verificata l'ipotesi $(P, Q) \sim 1$, potremo esprimere la legge di reciprocità mediante la formola

$$(19) \quad \left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{P}\right) (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2} + \frac{1-\text{sgn } P}{2} \cdot \frac{1-\text{sgn } Q}{2}},$$

che ha luogo per P e Q interi impari, qualunque.

§. 4.

a) **Introduzione dei Discriminanti nella legge di Legendre generalizzata.**

39. Kronecker chiamò *discriminante* D , un numero che sodisfa a una delle due congruenze

$$(1) \quad \begin{aligned} D &\equiv 1 \pmod{4} \\ D &\equiv 0 \pmod{4} : \end{aligned}$$

le formole trovate si semplificano molto per mezzo dei discriminanti.

Prima di tutto abbiamo le seguenti due formole caratteristiche:

per un numero impari P si ha sempre

$$(2) \quad (-1)^{\frac{P-1}{2}} P = D ;$$

perchè, quando $P = 4k + 1$, nella formola (2) P è un discriminante moltiplicato per $+1$, quando $P = 4k - 1$, nella formola (2) P è moltiplicato

per -1 , e prende la forma $-4k+1$ che è di nuovo un discriminante:
per un discriminante D impari

$$(3) \quad \left(\frac{-1}{D}\right) = \operatorname{sgn} D ;$$

perchè, quando $D = |D|$, si ha $D = 4k+1$ $\left(\frac{-1}{D}\right) = (-1)^{\frac{D-1}{2}} = +1$;
quando $D = -|D|$, si ha $|D| = 4k-1 = n$, e per la convenzione
del num. 38 $\left(\frac{-1}{D}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = -1$.

40. Essendo m un numero impari qualunque, e D un discriminante impari, il prodotto $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{D-1}{2}$ è sempre un numero pari; e la formola (19) del paragrafo precedente, per il caso in cui P e Q è un discriminante, prende la forma

$$(4) \quad \left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{m}{D}\right) (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} m}{2}} .$$

Vediamo come si può estender questa formola anche ai numeri pari.

Se a è un numero impari qualunque ed s un intero positivo, faremo la convenzione, seguendo in ciò Kronecker, che sia

$$(5) \quad \left(\frac{a}{2^s}\right) = \left(\frac{2^s}{a}\right) ;$$

e quindi se $n = 2^\alpha n'$ con n' impari, α intero positivo, ed m è un intero qualunque, applicando al simbolo $\left(\frac{m}{n}\right)$ le convenzioni di Jacobi e di Kronecker, avremo

$$(6) \quad \left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{2^\alpha}{m}\right) \left(\frac{m}{n'}\right) ,$$

formola che ha luogo evidentemente anche quando m ed n sono contem-

poraneamente pari. Supponiamo che in questa formola sia m un discriminante impari, ed applichiamo la (4); sarà

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{2^a}{D}\right) \left(\frac{D}{n'}\right) = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} n'}{2}} \left(\frac{2^a}{D}\right) \left(\frac{n'}{D}\right),$$

da cui

$$(7) \quad \left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{D}\right) (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} n}{2}} \quad (D \text{ impari, } \leq 0)$$

che ha la stessa forma della (4), ma è ora estesa al caso di n pari. Se n è positivo, pari o impari,

$$(8) \quad \left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{D}\right) \quad (n > 0);$$

ma questa formola non può essere estesa al caso di D pari.

b) Del caso in cui si possono aggiungere al numeratore del simbolo generalizzato i multipli del denominatore.

41. Sia P un numero impari, m ed h degli interi qualunque; per le definizioni precedenti si ha

$$(9) \quad \left(\frac{m+hP}{P}\right) = \left(\frac{m+hP}{p_1}\right) \left(\frac{m+hP}{p_2}\right) \dots = \left(\frac{m}{p_1}\right) \left(\frac{m}{p_2}\right) \dots \left(\frac{m+hP}{P}\right) = \left(\frac{m}{P}\right).$$

Supponiamo m impari ed il denominatore pari ed uguale a $2P$, con P impari: allora

$$\begin{aligned} \left(\frac{m+2hP}{2P}\right) &= \left(\frac{m+2hP}{2}\right) \left(\frac{m+2hP}{P}\right) = \left(\frac{2}{m+2hP}\right) \left(\frac{m}{P}\right) \\ &= (-1)^{\frac{(m+2hP)^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8} + hP} \frac{m+hP}{2} \left(\frac{m}{P}\right) = (-1)^{\frac{hP}{2}} \frac{m+hP}{2} \left(\frac{m}{2}\right) \left(\frac{m}{P}\right), \end{aligned}$$

dunque, P essendo impari,

$$(10) \quad \left(\frac{m + 2hP}{2P} \right) = (-1)^{\frac{m+hP}{2}} \left(\frac{m}{2P} \right).$$

Quando $h = 4k$, la (10) ci dà la seguente notevole formola

$$(11) \quad \left(\frac{m + 8kP}{2P} \right) = \left(\frac{m}{2P} \right). \quad (P \text{ ed } m \text{ impari})$$

Vogliamo ora supporre che il denominatore del simbolo abbia la forma $4P$, designando P un numero impari: applicando le formole superiori si ha subito

$$(12) \quad \left(\frac{m + 2hP}{4P} \right) = \left(\frac{m + 2hP}{4} \right) \left(\frac{m}{P} \right) = \left(\frac{m}{P} \right) \left(\frac{m}{4P} \right)$$

cioè si può in questo caso aggiungere al numeratore la metà del denominatore, senza cambiare il segno del simbolo.

Più in generale, quando $\gamma = 2\alpha$, α essendo un intero positivo; e P è impari,

$$\left(\frac{m + 8hP}{2^\gamma P} \right) = \left(\frac{m + 8hP}{4^\alpha P} \right) = \left(\frac{m}{4^\alpha} \right) \left(\frac{m}{P} \right) = \left(\frac{m}{4^\alpha P} \right);$$

e quando $\gamma = 2\alpha + 1$, restando le stesse le condizioni per α e P ,

$$\left(\frac{m + 8hP}{2^\gamma P} \right) = \left(\frac{m + 8hP}{4^\alpha \cdot 2P} \right) = \left(\frac{m + 8hP}{4^\alpha P} \right) \left(\frac{m}{2} \right) = \left(\frac{m}{2 \cdot 4^\alpha P} \right);$$

dunque, per γ pari o impari

$$(13) \quad \left(\frac{m + 8hP}{2^\gamma P} \right) = \left(\frac{m}{2^\gamma P} \right).$$

Si posson riassumere nel seguente quadro le formole che mostrano come varia la periodicità del simbolo di Legendre generalizzato per le

varie specie di denominatori:

$$\text{per } P \text{ impari} \left\{ \begin{array}{l} \text{si ha } \left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m'}{P}\right), \text{ quando } m \equiv m' \pmod{P}, \\ \left(\frac{m}{4P}\right) = \left(\frac{m'}{4P}\right), \text{ quando } m \equiv m' \pmod{2P}, \\ \left(\frac{m}{2^{\gamma}P}\right) = \left(\frac{m'}{2^{\gamma}P}\right), \text{ quando } m \equiv m' \pmod{8P}. \end{array} \right.$$

c) **Altre semplificazioni.**

42. a) Sia P un numero impari, Q e Q' due numeri impari e positivi, e legati dalla relazione $Q \equiv Q' \pmod{P}$: per quanto abbiamo veduto al numero precedente è

$$(14) \quad \left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{Q'}{P}\right),$$

e per la legge di reciprocità,

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right) (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-1}{2}}, \quad \left(\frac{Q'}{P}\right) = \left(\frac{P}{Q'}\right) (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q'-1}{2}},$$

da cui, confrontando i simboli uguali,

$$(15) \quad \left(\frac{P}{Q'}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right) (-1)^{\frac{P-1}{2} \cdot \frac{Q-Q'}{2}}.$$

b) Quando $P = D$ è discriminante impari, $\frac{P-1}{2}$ è pari, e la formola superiore prende la forma

$$(16) \quad \left(\frac{D}{Q'}\right) = \left(\frac{D}{Q}\right) \quad (Q \equiv Q' \pmod{D}, Q > 0, Q' > 0).$$

c) Riprendiamo le condizioni di a), con $P = D$ discriminante impari, e supponiamo che Q e Q' possano esser anche dei numeri negativi pari o impari.

La formola (14) ha luogo ancora, e quindi

$$(17) \quad \left(\frac{Q}{D}\right) = \left(\frac{Q'}{D}\right).$$

Nel caso in cui D è positivo, per la (4) si ha

$$\left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{D}\right), \quad \left(\frac{D}{Q'}\right) = \left(\frac{Q'}{D}\right),$$

e dunque

$$(18) \quad \left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{D}{Q'}\right) \quad \begin{matrix} (D > 0) \\ \text{e impari} \end{matrix} \quad Q \equiv Q' \pmod{D}.$$

Nel caso in cui $D = -\Delta$ è negativo, per la (4)

$$\left(\frac{-\Delta}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{-\Delta}\right) (-1)^{\frac{1-\text{sgn } Q}{2}} = \left(\frac{Q}{-\Delta}\right) \text{sgn } Q, \quad \left(\frac{Q'}{-\Delta}\right) = \left(\frac{-\Delta}{Q'}\right) \text{sgn } Q',$$

e per la (17)

$$(19) \quad \left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{D}{Q'}\right) \text{sgn } Q Q' \quad \begin{matrix} (D < 0) \\ \text{e impari,} \end{matrix} \quad Q \equiv Q' \pmod{D}.$$

a) Sia ora D un discriminante pari positivo o negativo; Q e Q' due interi impari positivi o negativi, legati dalla relazione $Q \equiv Q' \pmod{D}$. Questa congruenza di due numeri impari rispetto ad un modulo divisibile

per 4, ci dà $Q \equiv Q' \pmod{4}$, e quindi $(-1)^{\frac{Q-1}{2}} = (-1)^{\frac{Q'-1}{2}}$. Se il va-

lor comune di $(-1)^{\frac{Q-1}{2}}$ e $(-1)^{\frac{Q'-1}{2}}$ vien rappresentato con ε , εQ ed $\varepsilon Q'$ saran due discriminanti impari (vedi formola (2)), e sarà evidentemente

$$\varepsilon Q = \varepsilon Q' \pmod{D}.$$

Per la convenzione del num. 38, è

$$\left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{D}{\varepsilon Q}\right),$$

e poichè εQ è un discriminante impari, per la formola (4)

$$\left(\frac{D}{\varepsilon Q}\right) = \left(\frac{\varepsilon Q}{D}\right) (-1)^{\frac{1-\text{sgn } D}{2} \cdot \frac{1-\text{sgn } \varepsilon Q}{2}},$$

si ha dunque

$$(20) \quad \left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{\varepsilon Q}{D}\right) (-1)^{\frac{1-\text{sgn } D}{2} \cdot \frac{1-\text{sgn } \varepsilon Q}{2}}$$

$$\left(\frac{D}{Q'}\right) = \left(\frac{\varepsilon Q'}{D}\right) (-1)^{\frac{1-\text{sgn } D}{2} \cdot \frac{1-\text{sgn } \varepsilon Q'}{2}}$$

$$(Q \equiv Q' \pmod{D}), D \text{ discr. pari}.$$

Il discriminante pari D avrà la forma $4P$, o $2^i P$, con P impari e $i > 2$: inoltre εQ ed $\varepsilon Q'$ hanno per differenza un intero della forma $4hP$, o $8hP$ a causa della congruenza $\varepsilon Q \equiv \varepsilon Q' \pmod{D}$: dunque per le (12) e (13)

$$\left(\frac{\varepsilon Q}{D}\right) = \left(\frac{\varepsilon Q'}{D}\right).$$

Per mezzo di questa eguaglianza le (20) ci danno

$$\left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{D}{Q'}\right) (-1)^{\frac{1-\text{sgn } D}{2} (-\text{sgn } \varepsilon Q + \text{sgn } \varepsilon Q')} = \left(\frac{D}{Q'}\right) (-1)^{\frac{1-\text{sgn } D}{2} \cdot \frac{1-\text{sgn } QQ'}{2}}.$$

Per $D > 0$ la formola diviene identica alla (18), per $D < 0$ si ha di nuovo la (19): dunque riassumendo quello che abbiamo trovato in *c*) ed in *d*):

1.° quando $Q \equiv Q' \pmod{D}$, e D è un discriminante *positivo*, pari o impari

$$\left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{D}{Q'}\right) :$$

2.° quando $Q \equiv Q' \pmod{D}$, e D è un discriminante *negativo* pari o impari

$$\left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{D}{Q'}\right) \text{sgn } QQ'.$$

I due casi possono esser riuniti nell'unica formola

$$(21) \quad \left(\frac{D}{Q}\right) = \left(\frac{D}{Q'}\right) (-1)^{\frac{1 - \operatorname{sgn} D}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{sgn} Q Q'}{2}} \quad (Q \equiv Q' \pmod{D}).$$

d) Introduzione dei Discriminanti nelle formole che danno il valore delle Somme di Gauss.

43. Nella formola (11) del num. 35 supponiamo $\mu \equiv 1 \pmod{4}$, $\mu = D$ sarà un discriminante impari positivo; cangiamo il segno di h , e rammentando che $\left(\frac{-1}{D}\right) = 1$, si ha

$$G(2h, D) = \left(\frac{h}{D}\right) \sqrt{D}.$$

Sia ora $\mu \equiv -1 \pmod{4}$, l'espressione $-\mu$ è un discriminante negativo D : nella medesima formola (11) del num. 35 applicando la (11) del num. 5, $G(-2h, \mu) = G(2h, D)$; inoltre per la convenzione del num. 38

$$\left(\frac{h}{\mu}\right) = \left(\frac{h}{-\mu}\right) = \left(\frac{h}{D}\right); \text{ in fine } \sqrt{\frac{\mu-1}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu}} = \sqrt{D}$$

dunque possiamo scrivere, qualunque sia il segno del discriminante D , primo con $2h$,

$$(22) \quad G(2h, D) = \left(\frac{h}{D}\right) \sqrt{D} \quad (D \leq 0, (D, 2h) \sim 1).$$

Rammentiamo che la quantità $\sqrt{D}$ è, o positiva o immaginaria positiva.

44. La legge di reciprocità fra le Somme di Gauss, quando $\mu = D$ è discriminante impari, ci dà

$$G(-2h, D) \sqrt{\frac{-2hi}{D}} = G(D, 2h)$$

e, sostituendo a $G(-2h, D)$ il valore dato dalla (22),

$$(23) \quad G(D, 2h) = \left(\frac{-h}{D}\right) \sqrt{D} \sqrt{\frac{-2hi}{D}}.$$

Sia $z = \sqrt{D} \sqrt{\frac{-2hi}{D}}$: per calcolarlo distingueremo più casi.

a) Se $D > 0$, $z = \sqrt{-2hi}$;

rammentando che $\sqrt{-2hi}$ deve esser preso in maniera che la sua parte reale risulti positiva; per $h > 0$ $z = (1-i) \sqrt{h}$;

per $h < 0$ $z = i(1-i) \sqrt{|h|}$. In quest'ultimo caso possiamo fare $i \sqrt{|h|} = \sqrt{h}$, e così riunire i due casi nell'unica formula

$$z = (1-i) \sqrt{h} \quad (23^a)$$

b) Se $D < 0$, $z = \sqrt{-1} \sqrt{2hi} = i \sqrt{2hi}$

e per $h > 0$ $z = i(1+i) \sqrt{h} = -(1-i) \sqrt{h}$,

per $h < 0$ $z = i(1-i) \sqrt{|h|} = (1-i) \sqrt{h}$. (23^b)

Per arrivare ad un risultato più semplice bisogna vedere come si modifica nei due casi il segno di Legendre.

La formula (7) ci dà

$$\left(\frac{h}{D}\right) = \left(\frac{D}{h}\right) (-1)^{\frac{1-\text{sgn} D}{2} \cdot \frac{1-\text{sgn} h}{2}} \quad (D \geq 0 \text{ e impari})$$

e quando $D > 0$, a causa delle (3), (23) e di quanto abbiamo detto al comma a)

$$G(D, 2h) = \left(\frac{D}{h}\right) (1-i) \sqrt{h}.$$

Quando $D < 0$, per le (3) del num. 39 e (7) del num. 40,

$$\left(\frac{-h}{D}\right) = \left(\frac{-1}{D}\right) \left(\frac{h}{D}\right) = -\left(\frac{D}{h}\right) \text{sgn } h,$$

la (23) diviene

$$G(D, 2h) = -\left(\frac{D}{h}\right) \text{sgn } h \cdot z,$$

per la (23^b) è

$$-\text{sgn } h \cdot z = (1-i) \sqrt{h},$$

quindi abbiamo, come nel caso precedente,

$$(24) \quad G(D, 2h) = \left(\frac{D}{h}\right) (1-i) \sqrt{h},$$

formula che vale per D impari positivo o negativo, h qualunque, e nella quale, quando h è negativo, l'espressione $\sqrt{-|h|}$ equivale a $i\sqrt{|h|}$, con $\sqrt{|h|} > 0$.

§. 5.

I Discriminanti e l'Algoritmo d'Euclide.

Col metodo dell'Algoritmo d'Euclide, Kronecker stabilì il Simbolo di Legendre: noi esporremo questo metodo per il caso in cui uno dei due numeri è un discriminante impari, perchè ci darà dei risultati eleganti.

Prendiamo due numeri n_0 ed n_1 positivi o negativi, primi fra loro, e tali che si abbia

$$|n_0| > |n_1|, \quad n_0 \equiv 1 \pmod{4}, \quad n_1 \equiv 0 \pmod{2};$$

rappresentiamo con h_1 il quoziente e con n_2 il più piccolo resto in valore assoluto della divisione di n_0 per $2n_1$. Sarà $|n_2| < |n_1|$ e non potrà avvenire che $|n_2|$ sia uguale alla metà del divisore $2n_1$ presa in valore assoluto, perchè allora n_0 ed n_1 non sarebber più primi fra loro: si avrà dunque

$$(1) \quad |n_0| > |n_1| > |n_2|.$$

Operando in maniera analoga su n_1 ed n_2 , n_2 ed n_3 , ecc. si ottengono le equazioni seguenti

$$(2) \quad \begin{aligned} n_0 &= 2h_1n_1 + n_2 \\ n_1 &= 2h_2n_2 + n_3 \\ &\dots\dots\dots \\ n_{2x-2} &= 2h_{2x-1}n_{2x-1} + n_{2x}. \end{aligned}$$

Poichè abbiamo supposto che n_1 sia pari, saranno pari anche $n_3, n_5, \dots, n_{2x-1}$, come risulta dalle equazioni (1), e d'altra parte si avrà $n_0 \equiv n_2 \equiv \dots \equiv n_{2x} \equiv 1 \pmod{4}$: ora andando i numeri $n_0, n_1, \dots$ decrescendo

in valore assoluto, nell'ultima equazione dovrà essere $n_{2x} = 1$ senz'ambiguità di segno, perchè n_{2x} deve essere un discriminante.

Il sistema (2) è formato di $2x - 1$ equazioni: se si fosse supposto $n_0 \equiv 0 \pmod{2}$ ed $n_1 \equiv 1 \pmod{4}$, il ragionamento sarebbe stato il medesimo, ma il numero delle equazioni sarebbe stato pari, l'ultimo termine, uguale all'unità, avrebbe avuto l'indice di ordine impari. Il caso di n_0 ed n_1 impari non ha qui importanza. Continuiamo nella prima ipotesi.

L'equazione prima del sistema (2) ci dà $n_0 \equiv n_2 \pmod{2n_1}$; la terza ci dà $n_2 \equiv n_4 \pmod{2n_3}$, ecc. : i numeri $n_0, n_2, n_4, \dots$ sono coppie di numeri impari, ed i due elementi di ciascuna coppia sono congrui fra loro rapporto ad un modulo pari; se dunque poniamo $v_\alpha = \text{sgn } n_\alpha$, la (21) del numero 42 ci dà

$$\left(\frac{2n_1}{n_0}\right) = \left(\frac{2n_1}{n_2}\right) (-1)^{\frac{1-v_1}{2} \cdot \frac{1-v_0v_2}{2}} = \left(\frac{2n_1}{n_2}\right) (-1)^{\frac{1-v_1}{2} \cdot \frac{v_0-v_2}{2}} :$$

il numero n_2 è impari, e per la (9) del num. 41 si può sostituire $\left(\frac{2n_3}{n_1}\right)$

a $\left(\frac{2n_1}{n_2}\right)$, si ha quindi

$$\left(\frac{2n_1}{n_0}\right) = \left(\frac{2n_3}{n_2}\right) (-1)^{\frac{1-v_1}{2} \cdot \frac{v_0-v_2}{2}} ,$$

parimente si trova

$$\left(\frac{2n_3}{n_2}\right) = \left(\frac{2n_5}{n_4}\right) (-1)^{\frac{1-v_3}{2} \cdot \frac{v_2-v_4}{2}}$$

.....

$$\left(\frac{2n_{2x-1}}{n_{2x-2}}\right) = \left(\frac{2n_{2x-1}}{n_{2x}}\right) (-1)^{\frac{1-v_{2x-1}}{2} \cdot \frac{v_{2x-2}-v_{2x}}{2}} .$$

Moltiplicando membro a membro, e rammentando che $n_{2x} = 1$, si ottiene la seguente espressione del segno di Legendre

$$(3) \quad \left(\frac{2n_1}{n_0}\right) = (-1)^{\frac{1-v_1}{2} \cdot \frac{v_0-v_2}{2} + \frac{1-v_3}{2} \cdot \frac{v_2-v_4}{2} + \dots + \frac{1-v_{2x-1}}{2} \cdot \frac{v_{2x-2}-v_{2x}}{2}}$$

46. Sappiamo che (v. n. 24)

$$G(-n_0, n_1) \sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} = G(n_1, n_0),$$

$G(-n_0, n_1) = G(-2h_1 n_1 - n_2, n_1) = G(-n_2, n_1) = G(n_1, n_2) \sqrt{\frac{n_1 i}{n_2}}$
da cui

$$(4) \quad G(n_1, n_2) \sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} \sqrt{\frac{n_1 i}{n_2}} = G(n_1, n_0).$$

Per operare su $\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} \sqrt{\frac{n_1 i}{n_2}}$ bisogna distinguere tre casi:

1.° Caso $\operatorname{sgn} n_0 = \operatorname{sgn} n_1$.

Facciamo la convenzione che in questo come nei casi seguenti le radici delle quantità reali sien prese positivamente, e che si abbia per le quantità negative $\sqrt{-|r|} = i \sqrt{|r|}$.

Poichè la parte reale di $\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}}$ deve esser positiva,

$$\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} = \sqrt{\left| \frac{n_0}{n_1} \right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

ossia

$$\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} = \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_1} \cdot \sqrt{i}} \quad (\operatorname{sgn} n_0 = \operatorname{sgn} n_1).$$

2.° Caso $n_0 > 0, n_1 < 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} &= \text{quantità positiva} \times \frac{1}{\sqrt{-i}} = \sqrt{\left| \frac{n_0}{n_1} \right|} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_1}} \cdot i \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_1}} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} = -\frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_1} \sqrt{i}} \quad (n_0 > 0, n_1 < 0).$$

3.º Caso $n_0 < 0$, $n_1 > 0$.

$$\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} = \sqrt{\frac{|n_0|}{n_1}} \cdot \sqrt{i} = \frac{\sqrt{n_0}}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sqrt{i} ,$$

$$\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} = \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_1} \sqrt{i}} \quad (n_0 < 0 , n_1 > 0) .$$

I tre casi possono esser riuniti nell'unica formola

$$(5) \quad \sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} = (-1)^{\frac{1+\nu_0}{2} \cdot \frac{1-\nu_1}{2}} \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_1} \sqrt{i}} .$$

Al medesimo modo si dimostra che

$$\sqrt{\frac{n_2}{n_1 i}} = (-1)^{\frac{1+\nu_2}{2} \cdot \frac{1-\nu_1}{2}} \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1} \sqrt{i}} ,$$

e facendo la divisione

$$\sqrt{\frac{n_0}{n_1 i}} \sqrt{\frac{n_1 i}{n_2}} = (-1)^{\frac{1-\nu_1}{2} \cdot \frac{\nu_0-\nu_2}{2}} \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_2}} .$$

Sostituiamo nella (4) questo valore, e si avrà

$$(6) \quad (-1)^{\frac{1-\nu_1}{2} \cdot \frac{\nu_0-\nu_2}{2}} \frac{1}{\sqrt{n_2}} G(n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{n_0}} G(n_1, n_0) ,$$

ed a causa della congruenza $n_1 \equiv n_3 \pmod{2n_2}$

$$(-1)^{\frac{1-\nu_1}{2} \cdot \frac{\nu_0-\nu_2}{2}} \frac{1}{\sqrt{n_2}} G(n_3, n_2) = \frac{1}{\sqrt{n_0}} G(n_1, n_0) :$$

se rammentiamo che si ha $\left(\frac{2n_1}{n_0^x}\right) = (-1)^{\frac{1-\nu_1}{2} \cdot \frac{\nu_0-\nu_2}{2}} \left(\frac{2n_3}{n_2}\right)$, potremo

scrivere

$$(7) \quad \left(\frac{2n_1}{n_0}\right) \frac{1}{\sqrt{n_0}} G(n_1, n_0) = \left(\frac{2n_3}{n_2}\right) \frac{1}{\sqrt{n_2}} G(n_3, n_2).$$

Rappresentiamo con $f(n_1, n_0)$ il primo membro: si vede che $f(n_1, n_0)$ è una funzione che non cangia di valore quando si aumenta di due unità ciascuno degli indici di n : sarà dunque

$$f(n_1, n_0) = f(n_3, n_2) = \dots = \left(\frac{2n_{2x-1}}{n_{2x-2}}\right) \frac{1}{\sqrt{n_{2x-2}}} G(n_{2x-1}, n_{2x-2}).$$

Facendo nella (6) $n_0 = n_{2x-2}$, $n_1 = n_{2x-1}$, $n_2 = n_{2x} = 1$, viene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n_{2x-2}}} G(n_{2x-1}, n_{2x-2}) &= (-1)^{\frac{1-n_{2x-1}}{2} \cdot \frac{n_{2x-2}-1}{2}} G(n_{2x-1}, 1) = \\ &= (-1)^{\frac{1-n_{2x-1}}{2} \cdot \frac{n_{2x-2}-1}{2}}; \end{aligned}$$

e siccome per la (3)

$$\left(\frac{2n_{2x-1}}{n_{2x-2}}\right) = (-1)^{\frac{1-n_{2x-1}}{2} \cdot \frac{n_{2x-2}-1}{2}},$$

si può concludere che

$$(8) \quad f(n_1, n_0) = 1.$$

Supponendo $n_1 = 2l$ le (7) e (8) ci danno

$$(9) \quad G(2l, n_0) = \left(\frac{l}{n_0}\right) \sqrt{n_0}$$

formola che vale per $n_0 \equiv 1 \pmod{4}$, e che avevamo già stabilito per altra via al n. 43.

CAPITOLO III

Metodo algebrico di Gauss

§. 1.

**Le due formole fondamentali della memoria « Summatio quarundam
serierum singularium » (W. 2, p. 9, 1808, §§. 1-9).**

47. L'esposizione sintetica adottata da Gauss comparisce sotto una luce più chiara, se si richiamano alcune formole stabilite da Schendel¹⁾. Egli si propose di estendere la formola di Taylor, estensione che per altro era già contenuta nelle ricerche di Frobenius²⁾, riprese più tardi da Bendixson³⁾. È probabile che Gauss pensasse a delle formole analoghe a quelle stabilite da Schendel, ed alle quali conduce d'una maniera naturale il metodo d'interpolazione datoci da Gauss e da Newton. In particolare, il simbolo di Schendel che generalizza i coefficienti binomiali

$$\left(\frac{m}{n}\right)_q = \frac{(1-q)^m (1-q^{m-1}) \dots (1-q^{m-\mu+1})}{(1-q) (1-q^2) \dots (1-q^\mu)}$$

apparisce in Gauss sotto la forma $(m, \mu) = \frac{(1-x^m) (1-x^{m-1}) \dots (1-x^{m-\mu+1})}{(1-x) (1-x^2) \dots (1-x^\mu)}$ ove la lettera q è sostituita da x . Il simbolo (m, μ) diviene uguale a $\binom{m}{\mu}$, quando si fa $x=1$.

48. Sieno m e μ due interi di cui $\mu > 0$, e facciamo

$$(1) \quad (m, \mu) = \frac{(1-x^m) (1-x^{m-1}) \dots (1-x^{m-\mu+1})}{(1-x) (1-x^2) \dots (1-x^\mu)}.$$

Nei coefficienti binomiali si dimostra che $\binom{m}{\mu} = \binom{m}{m-\mu}$, moltiplicando

¹⁾ *Zur theorie der Functionem*, Crelle 84. — Delle forme analoghe si trovano esposte in una memoria di Jacobi, pubblicata nel giornale di Crelle 30.

²⁾ Crelle 73.

³⁾ *Acta Mathematica* T. 9.

i numeratori e i denominatori per $\frac{m-\mu}{m}$, e nel quoziente (1) moltiplicando il numeratore e denominatore per $(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{m-\mu})$, si ha

$$(2) \quad (m, \mu) = (m, m-\mu).$$

Nei coefficienti binomiali si ha $\binom{m}{m} = 1$, e qui dalla definizione stessa risulta $(m, m) = 1$; e, se poniamo per convenzione $(m, 0) = 1$, la (2) sarà verificata anche per $\mu = 0$.

Inoltre nei coefficienti binomiali per m intero e positivo $\binom{m}{m+\nu} = 0$, ed in (1), quando $\nu > 0$ ed $m > 0$, si ottiene $(m, m+\nu) = 0$.

Si stabilisce anche una formola di ricorrenza analoga alla formola dei coefficienti binomiali $\binom{m-1}{\mu+1} + \binom{m-1}{\mu} = \binom{m}{\mu+1}$. Si ha

$$\begin{aligned} (m, \mu) - (m-1, \mu) &= \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\mu)} \\ &\quad - \frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\dots(1-x^{m-\mu})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\mu)} = \\ &= \left\{ (1-x^m) - (1-x^{m-\mu}) \right\} \frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\dots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{\mu-1})} \cdot \frac{1}{1-x^\mu} \\ &= x^{m-\mu} (m-1, \mu-1) \end{aligned}$$

dunque

$$(3) \quad (m, \mu) - (m-1, \mu) = x^{m-\mu} (m-1, \mu-1).$$

Scrivendo $\mu+1$ invece di μ , e k invece di m

$$(k, \mu+1) - (k-1, \mu+1) = x^{k-\mu-1} (k-1, \mu):$$

facendo successivamente $k = \mu+2, \mu+3, \dots, m$, e sommando viene

$$(4) \quad (m, \mu+1) = \sum_{k=\mu}^{m-1} x^{k-\mu} (k, \mu),$$

che è analoga alla formola dei coefficienti binomiali

$$\binom{m}{\mu+1} = \sum_{k=\mu}^{m-1} \binom{k}{\mu};$$

e come si dimostra che $\binom{m}{\mu+1}$ è un numero intero, così è facile a vedersi

che $(m, \mu+1)$ è una funzione razionale intera: infatti $(m, 1) = \frac{1-x^m}{1-x}$

è un polinomio, e per mezzo della (4) $(m, 2)$ si esprime in funzione intera delle $(k, 1)$; $(m, 3)$ si esprime in funzione intera delle $(k, 2)$; e così di seguito: la proprietà enunciata è dunque evidente.

49. Nella somma

$$f(x, m) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu (m, \nu) \quad (m > 0)$$

poniamo $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (m, \nu)$ invece di $\sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu (m, \nu)$, il che si può

fare perchè i termini corrispondenti ai valori di $\nu = m+1, m+2, \dots$ sono nulli: sarà

$$(5) \quad f(x, m) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (m, \nu),$$

ed inoltre facciamo la convenzione che sia $f(x, 0) = 1$. Applicando la formola (3)

$$f(x, m) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (m-1, \nu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu x^{m-\nu} (m-1, \nu-1);$$

se scriviamo a parte nell'ultima somma il termine corrispondente a $\nu=1$, e poniamo $\nu+1$ in luogo di ν negli altri termini, essa diviene

$$-x^{m-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} x^{m-\nu-1} (m-1, \nu),$$

ed abbiamo quindi

$$f(x, m) = 1 - x^{m-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (1 - x^{m-\nu-1}) (m-1, \nu).$$

Per definizione

$$(1-x^{m-v-1})(m-1, v) = \frac{(1-x^{m-1}) \dots (1-x^{m-v})(1-x^{m-v-1})}{(1-x) \dots (1-x^v)} = \\ = (1-x^{m-1})(m-2, v),$$

quindi sostituendo nell'equazione precedente

$$f(x, m) = (1-x^{m-1}) \left\{ 1 + \sum_{v=1}^{\infty} (m-2, v) \right\},$$

cioè

$$(6) \quad f(x, m) = (1-x^{m-1}) f(x, m-2).$$

Questa proprietà delle funzioni $f(x, m)$ sussiste anche quando le $f(x, m)$ sono delle serie convergenti, ciò che avviene per m negativo o frazionario, e $x > 1$, ma per la determinazione delle somme di Gauss, non abbiamo bisogno d'osservare questo caso. Per m intero e positivo, la (6) esprime una relazione fra due polinomi. Applicando successivamente l'equazione (6) ai casi di $m=2, 4, 6, \dots$ si trova

$$\begin{aligned} f(x, 2) &= 1-x \\ f(x, 4) &= (1-x)(1-x^3) \\ (7) \quad &\dots \dots \dots \\ f(x, 2n) &= (1-x)(1-x^3) \dots (1-x^{2n-1}). \end{aligned}$$

Questa elegante formola converte in prodotto la somma $f(x, m)$ pei valori pari di m : per il caso di m impari, essendo $f(x, 1) = 0$, dalla (6) risulta che si ha sempre

$$f(x, 2n+1) = 0,$$

e facendo $x=1$, si ritrova la formola elementare

$$\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} = 0.$$

50. Studiamo ora la funzione

$$(8) \quad F(x, m) = \sum_{v=0}^m x^{\frac{v}{2}} (m, v)$$

nella quale la variabile indipendente è $x^{\frac{1}{2}}$. Facciamo $m-\mu=\nu$, e rammentiamo che $(m, \mu) = (m, m-\mu)$; si avrà

$$F(x, m) = \sum_{\mu=0}^m x^{\frac{m-\mu}{2}} (m, \mu),$$

da cui

$$x^{\frac{m+1}{2}} F(x, m) = \sum_{\mu=0}^m x^{m-\mu+\frac{\mu+1}{2}} (m, \mu).$$

Poniamo $\mu+1=\nu$, e sommiamo colla (8), sarà

$$\begin{aligned} \left(1+x^{\frac{m+1}{2}}\right) F(x, m) &= 1 + \sum_{\nu=1}^m x^{\frac{\nu}{2}} (m, \nu) + \sum_{\nu=1}^{m+1} x^{m-\nu+1} x^{\frac{\nu}{2}} (m, \nu-1) \\ &= 1 + \sum_{\nu=1}^m x^{\frac{\nu}{2}} \left\{ (m, \nu) + x^{m-\nu+1} (m, \nu-1) \right\} + x^{\frac{m+1}{2}} : \end{aligned}$$

l'espressione entro parentesi è per la (3) uguale a $(m+1, \nu)$, e il secondo membro diviene

$$1 + \sum_{\nu=1}^m x^{\frac{\nu}{2}} (m+1, \nu) + x^{\frac{m+1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{m+1} x^{\frac{\nu}{2}} (m+1, \nu) = F(x, m+1),$$

di guisa che si ha la relazione

$$(9) \quad \left(1+x^{\frac{m+1}{2}}\right) F(x, m) = F(x, m+1).$$

Dalla definizione stessa risulta $F(x, 0) = 1$. Nel ragionamento abbiamo supposto $m \neq 0$; ma la (8) e le due seguenti sussistono anche per

$m = 0$, nelle altre naturalmente le somme $\sum_1^m$ non hanno più significato,

e vengon soppresse, ma si arriva ugualmente alla formola (9) che avrà così un senso per tutti i valori intieri di $m \geq 0$,

Dalla (9) si deduce subito

$$(10) \quad F(x, m) = \left(1+x^{\frac{1}{2}}\right) \left(1+x\right) \left(1+x^{\frac{3}{2}}\right) \dots \left(1+x^{\frac{m}{2}}\right).$$

Per mezzo delle formole (7) e (10) si arriva a calcolare le Somme di Gauss. Cauchy ¹⁾ le stabilì ricorrendo alla formola d'interpolazione di Lagrange. Lo sviluppo del prodotto seguente

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^m) = 1+x \frac{1-x^m}{1-x} + x^2 \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x)(1-x^2)} + \dots + x^{\frac{m(m+1)}{2}} x^m$$

che conduce alle formole (7) e (10), per il modulo della variabile inferiore all'unità, conduce anche ad una formola, data da Eulero ²⁾ cioè

$$(1+x)(1+x^2)\dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)\dots(1-x^n)} x^n.$$

I teoremi importanti che Eulero ha dedotto da quest'ultima formola si trovano evidentemente in relazione coi teoremi analoghi che si deducono d'una maniera immediata dalla formola precedente, di guisa che in origine le due formole (7) e (10) devono esser attribuite ad Eulero come a suo inventore.

Più tardi Lebesgue studiò la funzione

$$f(x) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} x^{\frac{v(v+1)}{2}} \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^{v-1}x)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^v)}$$

che diviene identica a $f(x, m)$, quando si ponga x^{-1} in luogo di x ed x^m in luogo di x , ed allora la formola (7) è una conseguenza delle proprietà di $f(x)$. Questa funzione si presenta nella teoria delle Funzioni Ellittiche, e mostra l'analogia dei metodi stessi di Gauss con tali funzioni.

¹⁾ C. R. 3 febbraio 1840.

²⁾ *Introductio in Analysin infinitorum* T. I, Cap. XVI. — ³⁾ *Sommation de quelques séries*. Jou. de Liouville, T. V, pag. 42.

§. 2.

**Applicazione alla determinazione del valore
delle Somme $G(\lambda, \mu) - (l. c. §§. 10-20).$**

51. Sia μ un numero intero, positivo, impari, k un numero intero differente da zero, e tale che si abbia $(2k, \mu) \sim 1$.

Poniamo $r = e^{\frac{2k\pi i}{\mu}}$, e nella (7) del paragrafo precedente sostituiamo $\mu-1$ a $2n$, ed r ad x ; si avrà

$$f(r, \mu-1) = (1-r)(1-r^3) \dots (1-r^{\mu-2}).$$

Nella somma $f(r, \mu-1)$ ogni termine $(-1)^v (\mu-1, v)$ è costituito dal fattore $(-1)^v$, e da un prodotto di moltiplicatori della forma

$$\frac{1-r^{\mu-v}}{1-r^v} = \frac{1-r^{-v}}{1-r^v} = -r^{-v};$$

dunque

$$(-1)^v (\mu-1, v) = r^{-\frac{v(v+1)}{2}}$$

d'onde la formola importante

$$(1) \quad \sum_{v=0}^{\mu-1} r^{-\frac{v(v+1)}{2}} = (1-r)(1-r^3) \dots (1-r^{\mu-2}).$$

Facendo $k' = \mu - 2k$, si ha

$$r_1 = e^{\frac{2k'\pi i}{\mu}} = e^{-\frac{4k\pi i}{\mu}} = r^{-2};$$

e se sostituiamo in (1) r_1 , ad r ,

$$\sum_{v=0}^{\mu-1} r_1^{-\frac{v(v+1)}{2}} = \sum_{v=0}^{\mu-1} r^{-\frac{v(v+1)}{2}} = \prod_{\lambda=1, 3, \dots, \mu-2} (1-r^{-2\lambda}),$$

e, moltiplicando i due membri per $r \cdot r^3 \cdot r^5 \dots r^{\mu-2} = r^{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2}$

$$(2) \sum_{\nu=0}^{\mu-1} r^{\frac{1}{4}(\mu-2\nu-1)^2} = \prod_{\lambda=1,3,\dots,\mu-2} (r^{\lambda} - r^{-\lambda}) = (2i)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\lambda=1,3,\dots,\mu-2} \sin \frac{2k\lambda\pi}{\mu}.$$

Se poniamo $\mu-2\nu-1=2n$, mentre ν percorre i valori $0, 1, 2, \dots, \mu-1$, $2n$ percorre i valori $\mu-1, \mu-3, \dots, -(\mu-1)$, cioè un sistema completo di resti rapporto a μ , si ha dunque

$$(3) \sum_{\alpha=0}^{\mu-1} e^{\frac{\alpha^2 2k\pi i}{\mu}} = (2i)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\lambda=1,3,\dots,\mu-2} \sin \frac{2k\lambda\pi}{\mu} \quad (2k, \mu) \sim 1, \mu > 0).$$

Questa formola ci dà digià il valore delle Somme di Gauss; ma noi vogliamo calcolarne il quadrato: ed a tale scopo porremo

$$\sum_{\alpha=0}^{\mu-1} r^{\alpha^2} = W$$

o, per la (2),

$$W = \prod_{\lambda=1,3,\dots,\mu-2} (r^{\lambda} - r^{-\lambda}) :$$

e facendo $\lambda = \mu - 2n$ con $n = 1, 2, 3, \dots, \frac{\mu-1}{2}$,

$$(4) \quad W = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{n=1}^{\frac{\mu-1}{2}} (r^{2n} - r^{-2n}).$$

Moltiplicando membro a membro le due ultime equazioni

$$W^2 = (1-)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\lambda=1,3,\dots,\mu-2} (r^{\lambda} - r^{-\lambda}) \prod_{n=1,2,\dots,\frac{\mu-1}{2}} (r^{2n} - r^{-2n}),$$

e poichè λ percorre i numeri impari da 1 a $\mu-1$, e $2n$ i numeri pari compresi fra i medesimi limiti, si avrà

$$W^2 = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\alpha=1}^{\mu-1} (r^\alpha - r^{-\alpha}) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} r^{1+2+3+\dots+\mu-1} \prod_{\alpha=1}^{\mu-1} (1 - r^{-2\alpha})$$

$$W^2 = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\alpha=1}^{\mu-1} (1 - r^{-2\alpha}).$$

Facendo variare α fra 1 ed $n-1$, $r^{-2\alpha}$ percorre tutte le radici dell'equazione binomia del grado μ , eccettuata l'unità: ora, designando con x una quantità variabile, si ha l'identità algebrica

$$\prod_{\alpha=1}^{\mu-1} (x - r^{-2\alpha}) = \frac{x^\mu - 1}{x - 1} = x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + \dots + x + 1,$$

e per $x = 1$

$$(5) \quad \prod_{\alpha=1}^{\mu-1} (1 - r^{-2\alpha}) = \mu,$$

dunque

$$W^2 = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu,$$

$$W = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu},$$

risultato al quale si arriva in una maniera differente quando si ricorre alle funzioni alterne. La formola (4) ci dà

$$(6) \quad W = (-2i)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu-1}{2}} \sin \frac{4k\nu\pi}{\mu},$$

che per $k=1$ prende la forma

$$W_1 = (-2i)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu-1}{2}} \sin \frac{4\nu\pi}{\mu}.$$

Quando $\nu \leq \left[\frac{\mu}{4}\right]^1$, il seno è positivo, quando $\nu > \left[\frac{\mu}{4}\right]$, il seno è negativo, dunque

$$\operatorname{sgn} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu-1}{2}} \sin \frac{4\nu\pi}{\mu} = (-1)^{\frac{\mu-1}{2} - \left[\frac{\mu}{4}\right]};$$

ma d'altra parte

$$W_1 = \pm i^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{\mu},$$

facendo la convenzione di prendere *positivamente* la radice di μ e rappresentando con ε il segno conveniente,

$$W_1 = \varepsilon i^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{\mu} = (-2)^{\frac{\mu-1}{2}} i^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu-1}{2}} \sin \frac{4\nu\pi}{\mu},$$

$$\varepsilon = \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu-1}{2}} \left(2 \sin \frac{4\nu\pi}{\mu}\right)}{\sqrt{\mu}};$$

e poichè i segni di $\sqrt{\mu}$ e del prodotto del numeratore sono noti, abbiamo il valore di ε dato dalla formola seguente

$$\varepsilon = (-1)^{\left[\frac{\mu}{4}\right]},$$

¹⁾ Per ogni valore reale di x Gauss rappresentò con $[x]$ il più grande intero algebrico contenuti in x , che soddisfa alla condizione $[x] \leq x < [x] + 1$. (Werke II, p. 5 1808).

e quindi

$$W_1 = (-1)^{\left[\frac{\mu}{4}\right]} i^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{\mu}.$$

Per $\mu \equiv 1 \pmod{4}$, $(-1)^{\left[\frac{\mu}{4}\right]} i^{\frac{\mu-1}{2}} = 1$, $W_1 = \sqrt{\mu}$;

» $\mu \equiv -1 \pmod{4}$, $(-1)^{\left[\frac{\mu}{4}\right]} i^{\frac{\mu-1}{2}} = i$ $W_1 = i\sqrt{\mu}$:

i due casi possono esser riuniti nell'unica formola

$$(7) \quad W_1 = i^{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2} \sqrt{\mu},$$

che ci dà il valore delle somme $G(-2k, \mu)$ nel caso particolare di $k=1$ e μ impari e positivo.

52. Se supponiamo che μ abbia la forma $4h+2$, e prendiamo k impari e primo con μ , i termini sono due a due uguali e di segno contrario, e si ottiene

$$(8) \quad W = \sum_{v=0}^{\mu-1} e^{v^2 \frac{2k\pi i}{\mu}} = 0,$$

e se μ è della forma $4h$, come risulta dalla (12) del num. 6 si ha

$$(9) \quad W = 2 \sum_{v=0}^{\frac{\mu-2}{2}} e^{v^2 \frac{2k\pi i}{\mu}}.$$

Nell'equazione (10) del § precedente facciamo $m = \frac{\mu}{2} - 1$, $x^{\frac{1}{2}} = -r^{-1}$, con r radice primitiva dell'equazione binomia $x^{\mu} - 1 = 0$, ed accresciamo il prodotto del fattore $2 = 1 + r^0$; si avrà

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{\frac{\mu}{2}-1} (-1)^v r^{-v} \frac{(1-r^{-\mu+2})(1-r^{-\mu+4})\dots(1-r^{-\mu+2v})}{(1-r^{-2})(1-r^{-4})\dots(1-r^{-2v})} = \\ & = \frac{1}{2} \prod_{v=0}^{\frac{\mu}{4}-1} (1-r^{-2v-1})(1-r^{-2v}), \end{aligned}$$

ma per ν intero

$$\frac{1-r^{-\mu+\nu}}{1-r^{-\nu}} = -r^{\nu}$$

$$(-1)^{-\nu} r^{-\nu} \frac{(1-r^{-\mu+2}) \dots (1-r^{-\mu+2\nu})}{(1-r^{-2}) \dots (1-r^{-2\nu})} = r^{-\nu} \cdot r^{2(1+2+3+\dots+\nu)} = r^{\nu^2};$$

sostituendo nella somma, si ha

$$(10) \quad 2 \sum_{\nu=0}^{\frac{\mu}{2}-1} r^{\nu^2} = \prod_{\nu=0}^{\frac{\mu}{4}-1} (1-r^{-2\nu-1}) (1+r^{-2\nu}).$$

Si può scrivere

$$(1+r^{-2\nu}) = -r^{\frac{\mu}{2}-2\nu} \left(1-r^{-\frac{\mu}{2}+2\nu} \right)$$

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{\mu}{4}-1} (1+r^{-2\nu}) = (-1)^{\frac{\mu}{4}-1} r^{\frac{\mu}{4} \left(\frac{\mu}{4}-1 \right)} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu}{4}-1} \left(1-r^{-\frac{\mu}{2}+2\nu} \right),$$

donde

$$(11) \quad \prod_{\nu=0}^{\frac{\mu}{4}-1} (1-r^{-2\nu-1}) (1+r^{-2\nu}) = (-1)^{\frac{\mu}{4}-1} 2 r^{\frac{\mu}{4} \left(\frac{\mu}{4}-1 \right)} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu}{2}-1} (1-r^{-\nu}):$$

e poichè

$$(1-r^{-\nu}) = -r^{-\nu} (1-r^{-\mu+\nu}),$$

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{\mu}{2}-1} (1-r^{-\nu}) = (-1)^{\frac{\mu}{2}-1} r^{-\frac{\mu}{4} \left(\frac{\mu}{2}-1 \right)} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu}{2}-1} (1-r^{-\mu+\nu});$$

$$\prod_{\nu=0}^{\frac{\mu}{4}-1} (1-r^{-2\nu-1}) (1+r^{-2\nu}) = (-1)^{\frac{3\mu}{4}-2} 2 r^{-\frac{\mu^2}{16}} \prod_{\nu=\frac{\mu}{2}+1}^{\mu-1} (1-r^{-\nu}):$$

sostituendo nella (10), e scrivendo invece di 2 il fattore $1-r^{-\frac{\mu}{2}}$, avremo

$$(12) \quad 2^{\frac{\mu}{2}-1} \sum_{\nu=0}^{\frac{\mu}{2}} r^{\nu^2} = (-1)^{\frac{3\mu}{4}-2} r^{-\frac{\mu^2}{16}} \prod_{\nu=\frac{\mu}{2}}^{\mu-1} (1-r^{-\nu}).$$

Nell'ipotesi di $r=e^{\frac{2k\pi i}{\mu}}$ le (11) e (12) ci danno il valore di W ; se le moltiplichiamo fra loro, abbiamo

$$W^2 = (-1)^{\mu-3} 2^{\frac{\mu}{4}-1} \prod_{\nu=1}^{\mu-1} (1-r^{-\nu}),$$

ma

$$(-1)^{\mu-3} 2^{\frac{\mu}{4}-1} = e^{-\frac{k\pi i}{2}} \begin{cases} = -e^{-\frac{\pi i}{2}} = i & , \text{ quando } k=4n+1 \\ = -e^{\frac{\pi i}{2}} = -i & , \text{ quando } k=4n-1: \end{cases}$$

si avrà dunque, se applichiamo la (5) al prodotto,

$$W^2 = (-1)^{\frac{k-1}{2}} 2^{i\frac{\mu}{4}}$$

e facendo $k=1$

$$(13) \quad W_1 = \pm (1+i) \sqrt{\mu}.$$

Essendo ora $r=e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$, poniamo $\rho=e^{\frac{\pi i}{\mu}}$, da cui $\rho^{\mu} = -1$, $-r^{-\nu} = \rho^{\mu-2\nu}$; la (20) ci dà

$$\begin{aligned} W_1 &= \prod_{\nu=0}^{\frac{\mu}{4}-1} (1+\rho^{\mu-4\nu-2})(1+\rho^{-4\nu}) = 2(1+\rho^2)(1+\rho^{-4})\dots(1+\rho^{-(\mu-4)})(1+\rho^{\mu-2}) \\ &= 2\rho(\rho+\rho^{-1})\rho^{-2}(\rho^2+\rho^{-2})\rho^3(\rho^3+\rho^{-3})\dots\rho^{\frac{\mu-2}{2}}\left(\rho^{\frac{\mu-2}{2}}+\rho^{-\frac{\mu-2}{2}}\right), \end{aligned}$$

e sostituendo le funzioni trigonometriche alle funzioni esponenziali che sono entro le parentesi, si ottiene

$$W_1 = 2^{\frac{\mu}{2}} \rho^{\frac{\mu}{4}} \prod_{\nu=1}^{\frac{\mu}{2}-1} \cos \frac{\nu \pi}{\mu}.$$

In questa formola $2^{\frac{\mu}{2}}$ è positivo, $\rho^{\frac{\mu}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = (1+i) \sqrt{\frac{1}{2}}$

con $\sqrt{\frac{1}{2}} > 0$, tutti i coseni del prodotto sono pure positivi, dunque W_1 è il prodotto di $1+i$ per una quantità positiva, e nell'equazione (13) il segno da prendersi sarà il superiore. Si avrà così il valore di W_1 per $\mu \equiv 0 \pmod{4}$ dato senza ambiguità di segno dall'equazione

$$(14) \quad W_1 = (1+i) \sqrt{\mu}.$$

Si posson riunire nel seguente prospetto le formole (7) (8) e (14) a cui ci ha condotto questo metodo algebrico:

$$G(-2k, \mu) \begin{cases} = i^{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2} \sqrt{\mu} & \text{per } \mu \text{ primo, impari, positivo e } k=1, \\ = (1+i) \sqrt{\mu} & \text{per } \mu \equiv 0 \pmod{4}, >0 \text{ e } k=1, \\ = & 0 \text{ per } \mu \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}, \quad k \equiv 1 \pmod{2} \\ \text{e } (\mu, k) \sim 1.$$

53. Avevamo già ottenute queste formole precedentemente, ed in una maniera più generale: ma lo scopo di questo Capitolo è stato di completare i metodi che conducono alle Somme di Gauss, e di far vedere come col processo algebrico si può stabilire tutta la teoria che si riferisce alle somme studiate. Nella *Summatio quarundam serierum etc.* si trova anche l'estensione di $G(\lambda, \mu)$ al caso di μ uguale ad una potenza qualunque d'un numero primo pari o impari (§§. 21-24); la legge di *composizione* per μ positivo qualunque (§§. 25-28). La formola (9) che abbiamo dato al n. 26 e la (1) del n. 32 si trovano rispettivamente ai §§. 31 e 32 della memoria di Gauss; in quest'ultimo paragrafo la formola è ottenuta

con una sostituzione, mentre noi ci siamo serviti della legge di reciprocità scoperta da Cauchy e Kronecker. In fine al § 33 di Gauss si trova la legge di reciprocità fra i residui quadratici. È inutile ripetere qui le dimostrazioni di proprietà già trattate nel Cap. precedente con tutte le generalizzazioni di cui sono apparse suscettibili. Ciò che ha reso celebre la bella memoria di Gauss è precisamente quello che abbiamo già esposto in questo Cap., cioè la maniera con cui egli è arrivato a trasformare le somme di certe potenze delle radici primitive dell'unità in prodotti di seni e coseni facili a calcolarsi.

Sarà invece utile aggiungere ancora un paragrafo contenente alcune conseguenze immediate delle formole date da Gauss.

§. 3.

L'espressione aritmetica del segno di Jacobi dedotta come conseguenza della Memoria di Gauss « Summatio etc. ».

54. Abbiain trovato nel paragrafo precedente, per n impari e positivo, e $(2h, n) \sim 1$, (v. form. (3) del num. 51)

$$(1) \quad G(-2h, n) = (2i)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{m=1, 3, 5, \dots, n-2} \sin \frac{2hm\pi}{n};$$

e parimente (v. form. (6))

$$(2) \quad G(-2h, n) = (-2i)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{4hk\pi}{n};$$

possiamo (num. 35, (11)) colle medesime condizioni scrivere la formola seguente (che si ottiene anche col metodo di Gauss)

$$(3) \quad G(-2h, n) = \left(\frac{h}{n}\right) \sqrt[(-1)^{\frac{n-1}{2}}]{n},$$

ove per $(-1)^{\frac{n-1}{2}} = -1$, si prende $\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$ con $\sqrt{n} > 0$: con-

frontando la (2) e la (3) abbiamo

$$(4) \quad \left(\frac{h}{n}\right) \sqrt{\frac{n-1}{2}} \quad n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} i^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(2 \sin \frac{4 h k \pi}{n}\right).$$

Questa formola contiene di già una determinazione del segno di Legendre per mezzo delle funzioni trigonometriche.

55. Dalle formole (1) e (3) si ottiene

$$\left(\frac{h}{n}\right) \sqrt{\frac{n-1}{2}} \quad n = i^{\frac{n-1}{2}} \prod_{m=1, 3, \dots, n-2} \left(2 \sin \frac{2 h m \pi}{n}\right),$$

od anche

$$\left(\frac{h}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{n-1}{2}} \quad n = i^{\frac{n-1}{2}} \prod_{m=1, 3, \dots, n-2} \left(2 \sin \frac{2 h m \pi}{n}\right) \quad (\sqrt{n} > 0).$$

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione per $i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$, e rammentiamo che

$$(-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{-1}{n}\right), \text{ e che } i^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = \left(\frac{2}{n}\right);$$

si avrà

$$\left(\frac{-1}{n}\right) \left(\frac{h}{n}\right) \sqrt{n} = \left(\frac{2}{n}\right) \prod_{m=1, 3, \dots, n-2} \left(2 \sin \frac{2 h m \pi}{n}\right)$$

cioè

$$(5) \quad \left(\frac{h}{n}\right) \sqrt{n} = \left(\frac{-2}{n}\right) \prod_{m=1, 3, \dots, n-2} \left(2 \sin \frac{2 h m \pi}{n}\right):$$

e poichè

$$\left| \prod_{m=1, 3, \dots, n-2} \left(2 \sin \frac{2 h m \pi}{n}\right) \right| = \sqrt{n}$$

si deduce dalla (5) trascurando i fattori positivi, e moltiplicando per $\left(\frac{2}{n}\right)$,

$$\left(\frac{2h}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sgn} \prod_{m=1,3,\dots,n-2} \sin \frac{2hm\pi}{n}.$$

Una quantità reale u può essere scritta sotto la forma d'un intero v più una frazione s il cui valore assoluto è più piccolo od uguale a $\frac{1}{2}$, quindi, essendo $u = v + s$, si avrà

$$\sin 2u\pi = \sin 2s\pi, \text{ e } \sin 2s\pi \begin{cases} > 0, \text{ quando } 0 < s < \frac{1}{2}, \\ = 0, \text{ quando } s = \frac{1}{2}, \\ < 0, \text{ quando } 0 > s > -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

s è il resto di u col minimo modulo, si rappresenta col simbolo $R(u)$, e si prende $\operatorname{sgn} R(u) = -1$ quando $|s| = \frac{1}{2}$. Escluso il caso di $s = -\frac{1}{2}$, che nel prodotto precedente non apparisce, avremo

$$\operatorname{sgn} \sin 2u\pi = \operatorname{sgn} R(u)$$

donde

$$(6) \quad \left(\frac{2h}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sgn} \prod_{m=1,3,\dots,n-2} R\left(\frac{hm}{n}\right).$$

Con delle operazioni analoghe sulla (4), si trova

$$(7) \quad \left(\frac{2h}{n}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{2hk}{n}\right);$$

ma si può dedurla dalla (6) facendo $m = n - 2k$, perchè $\frac{hm}{n} = \frac{h(n-2k)}{n}$,

$$R\left(\frac{hm}{n}\right) = -R\left(\frac{2hk}{n}\right),$$

$$\prod_{m=1,3,\dots,n-2} R\left(\frac{hm}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{2hk}{n}\right) :$$

sostituendo questo valore nella (6) si ottiene subito la (7). Queste due ci danno il valore del simbolo nel caso del numeratore pari; per passare al numeratore impari, bisogna notare che designando con μ un numero impari, si ha $2h = \mu - n$; $R\left(\frac{2hk}{n}\right) = R\left(\frac{\mu - n}{n} k\right) = R\left(\frac{\mu k}{n}\right)$, e la (7) ci dà

$$\left(\frac{\mu - n}{n}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{\mu k}{n}\right) = \left(\frac{\mu}{n}\right) :$$

il segno del simbolo nel caso del numeratore impari ci è dunque dato dalla medesima formola che ce lo dà nel caso del numeratore pari. Se m è un numero intero positivo o negativo, si posson riunire i due risultati nell'unica formola

$$(8) \quad \left(\frac{m}{n}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{km}{n}\right) \quad (2m, n) \sim 1$$

che ci dà un'espressione aritmetica del segno di Legendre generalizzato da Jacobi, e comprende anche il caso di m ed n non primi fra loro, perchè in questo caso nel secondo membro almeno un fattore è nullo, e si ha $\left(\frac{m}{n}\right) = 0$.

Questo teorema dovuto a Schering, si stabilirà di nuovo nel capitolo seguente.

CAPITOLO IV

Di alcune considerazioni a proposito del teorema di Schering, e dei teoremi di Ei- senstein.

§. 1.

Il Lemma di Gauss generalizzato da Schering.

56. Sappiamo dalla teoria dei numeri che, quando p è primo impari ed m non è suo multiplo, si ha

$$(1) \quad m^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{m}{p}\right) (\text{mod. } p) ,$$

e questa formola costituisce il *criterio d'Eulero* espresso per mezzo del simbolo di Legendre. Ognuno degli interi del sistema

$$(h) \quad 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$$

è primo con p , e gli interi del sistema

$$(mh) \quad m, 2m, 3m, \dots, \frac{p-1}{2} m$$

sono incongrui fra loro per rapporto al modulo p , e nessuno di essi è $\equiv 0$ (mod. p). Prendendo i loro resti, rispetto a p , col più piccolo modulo, resti che, astrazion fatta dal segno, hanno i valori $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}$, avremo

$$mh \equiv \epsilon h' \pmod{p}.$$

con $\varepsilon = \pm 1$, $0 < h' < \frac{p}{2}$, da cui

$$\prod_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} (mh) \equiv \prod_{h'=1}^{\frac{p-1}{2}} (\varepsilon h') \pmod{p}.$$

$$\prod_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} h = \prod_{h'=1}^{\frac{p-1}{2}} h'$$

Ma $\prod_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} h = \prod_{h'=1}^{\frac{p-1}{2}} h'$ è una quantità prima con p : si può dunque sopprimere questo fattore comune, e resta

$$(2) \quad m^{\frac{p-1}{2}} = \prod \varepsilon \pmod{p}.$$

Rappresentiamo con $\mu(m, p)$ il numero delle volte in cui si ha $\varepsilon = -1$, cioè il numero dei più piccoli resti negativi del sistema $m, 2m, \dots, \frac{p-1}{2}m$: si avrà

$$(3) \quad \left(\frac{m}{p}\right) = (-1)^{\mu(m, p)}$$

cioè « Il numero m è residuo o non-residuo quadratico per rapporto al « numero primo p , secondo che nel sistema (mh) il numero $\mu(m, p)$ dei « resti rapporto a p , negativi, col più piccolo modulo, è pari o impari ». È questo il Lemma di Gauss, a cui per altro si può dare un'altra forma.

Per le convenzioni fatte

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &< \frac{\varepsilon h'}{p} < \frac{1}{2} \\ \varepsilon h' &\equiv mh \pmod{p} \\ \varepsilon &= \operatorname{sgn} R\left(\frac{mh}{p}\right), \end{aligned}$$

e per le (1) e (2) si ha la formola seguente

$$(4) \quad \left(\frac{m}{p}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{mh}{p}\right) \quad (p \text{ primo e } > 0)$$

che ci dà il Lemma di Gauss sotto una forma già conosciuta nel Capo precedente n. 55. Si può, partendo da questa formola, arrivare alla generalizzazione che ne ha dato Schering ¹⁾. Ma qui procederemo nel modo inverso: rappresenteremo con $S_{m,n}$ il segno del prodotto al quale vogliamo arrivare, e dimostreremo che $S_{m,n}$ coincide col simbolo $\left(\frac{m}{n}\right)$. È bene insistere su questa espressione aritmetica del simbolo, perchè potrà dare dei risultati interessanti, sebbene non abbia il vantaggio di poter esser rappresentata analiticamente.

57. Sia dunque

$$(5) \quad S_{m,n} = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{mh}{n}\right) : \quad (2m, n) \sim 1$$

raggruppiamo insieme i fattori che provengono dai valori di h aventi con n il medesimo massimo comun divisore. Se d è un divisore di n , i valori di h che corrispondono al massimo comun divisore $\frac{n}{d}$, hanno la forma

$h = \frac{n}{d} r$, e quindi

$$(6) \quad S_{m,n} = \operatorname{sgn} \prod_d \prod_r R\left(\frac{mr}{d}\right);$$

ove a causa della diseuguaglianza $h < \frac{n}{2}$, si ha $\frac{n}{d} r < \frac{n}{2}$, di guisa che $r < \frac{d}{2}$, $(r, d) \sim 1$, cioè r percorre tutti i valori primi con d ed inferiori a $\frac{d}{2}$.

I casi estremi sono: — 1° $d=n$ ed in questo caso r percorre i valori primi con n ; — 2° $d=3$: il caso $d=2$ evidentemente non si presenta, perchè n è impari.

Si ha

$$(7) \quad mr \equiv r' \operatorname{sgn} R\left(\frac{mr}{d}\right) \pmod{d}$$

¹⁾ Berliner Monatsber. 1876 p. 330. — Acta Math. 1, p. 153.

$$0 < r' < \frac{d}{2}.$$

Per un determinato valore di d , i valori del sistema r sono tutti incongrui fra loro, ed astrazione fatta dall'ordine, sono gli stessi del sistema r' , d'onde

$$\prod r = \prod r'.$$

Rappresentiamo, come si fa abitualmente, con $\varphi(d)$ il numero degli interi inferiori a d e primi con d . Ognuno dei due prodotti precedenti contiene $\frac{1}{2} \varphi(d)$ fattori, e facendo il prodotto delle congruenze della forma (7)

$$m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} \prod r \equiv \prod r' \cdot \prod_r \operatorname{sgn} R\left(\frac{mr}{d}\right) \pmod{d};$$

ma $\prod r$ è primo con d , dividendo quindi i due membri della congruenza per questo fattore comune resta

$$(8) \quad m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} \equiv \prod_r \operatorname{sgn} R\left(\frac{mr}{d}\right) \pmod{d}.$$

Decomponiamo d nel prodotto dei suoi fattori primi $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots$ sarà $\frac{d}{p_1^{\alpha_1}} \cdot p_1^{\alpha_1}$ un prodotto di due numeri primi fra loro, e quindi

$$\begin{aligned} \varphi(d) &= \varphi\left(\frac{d}{p_1^{\alpha_1}}\right) \varphi(p_1^{\alpha_1}) \\ m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} &= \left\{ m^{\varphi(p_1^{\alpha_1})} \right\}^{\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{d}{p_1^{\alpha_1}}\right)}. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Fermat generalizzato all'espressione entro parentesi $m^{\varphi(p_1^{\alpha_1})} = m^{(p_1-1)p_1^{\alpha_1-1}} \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$ si ottiene

$$m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$$

la stessa congruenza si ottiene rispetto ai moduli $p_2^{a_2}$, $p_3^{a_3}$, ecc. dunque

$$(9) \quad m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} \equiv 1 \pmod{d}.$$

Supponendo che d sia potenza di un solo numero primo che sarà naturalmente impari $d = p^\alpha$, per il teorema di Fermat

$$\left(m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} - 1 \right) \left(m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} + 1 \right) \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

e poichè la differenza di questi due fattori $= 2$ non è divisibile per p , essi non possono esser contemporaneamente divisibili per p : secondochè dunque l'uno o l'altro è divisibile per p^α , si avrà

$$m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} \equiv \pm 1 \pmod{p^\alpha}.$$

Si vede subito che il segno dipende da p , e p essendo impari

$$(10) \quad m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} = \left(m^{\frac{p-1}{2}} \right)^{p^{\alpha-1}} = \left(\frac{m}{p} \right)^{p^{\alpha-1}} \equiv \left(\frac{m}{p} \right) \pmod{p^\alpha}.$$

La differenza fra i due risultati è manifesta;

$$m^{\frac{1}{2} \varphi(d)} \begin{cases} \equiv 1 \pmod{d}, & \text{quando } d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots \\ \equiv \left(\frac{m}{p} \right) \pmod{d}, & \text{quando } d = p^\alpha; \end{cases}$$

e riprendendo la (8) ove $\prod_r \operatorname{sgn} R \left(\frac{mr}{d} \right) = \operatorname{sgn} \prod_r R \left(\frac{mr}{d} \right)$, avremo

$$(11) \quad \operatorname{sgn} \prod_r R \left(\frac{mr}{d} \right) \begin{cases} = 1, & \text{quando } d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots \\ = \left(\frac{m}{p} \right), & \text{quando } d \text{ è una potenza d'un numero primo } p. \end{cases}$$

1.º Nel caso di n primo e $(2m, n) \sim 1$, d ha il solo valore n , r per-

corre i valori $1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ ed

$$S_{m,n} = \operatorname{sgn} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} R\left(\frac{mr}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right),$$

cioè il prodotto (5) coincide col Lemma di Gauss, e ci dà l'espressione aritmetica del Simbolo di Legendre.

2.° Nel caso di $n = p^\alpha$ (potenza di numero primo) e $(2m, p) \sim 1$, d percorre α valori che sono potenze di un numero primo p , e per ognuno di essi la (11) ci dà

$$\operatorname{sgn} \prod_r R\left(\frac{mr}{d}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)$$

quindi

$$\operatorname{sgn} \prod_d \prod_r R\left(\frac{mr}{d}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)^\alpha = \left(\frac{m}{n}\right)$$

cioè anche per $n = p^\alpha$

$$S_{m,n} = \left(\frac{m}{n}\right).$$

3.° Quando infine $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ i fattori che hanno influenza su $S_{m,n}$ sono soltanto quelli che rispondono ai valori di d , formati da potenze di un solo numero primo, e dunque

$$S_{m,n} = S_{m,p_1^{\alpha_1}} \times S_{m,p_2^{\alpha_2}} \times S_{m,p_3^{\alpha_3}} \times \dots;$$

ma per quanto abbiamo detto di sopra

$$S_{m,p_1^{\alpha_1}} = \left(\frac{m}{p_1^{\alpha_1}}\right); \quad S_{m,p_2^{\alpha_2}} = \left(\frac{m}{p_2^{\alpha_2}}\right);$$

donde

$$S_{m,n} = \left(\frac{m}{n}\right)$$

cioè il prodotto che abbiamo preso al principio di questo numero non è

altro che il simbolo di Jacobi, ed avremmo potuto porre subito

$$(12) \quad \left(\frac{m}{n}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n}\right] \quad (2m, n) \sim 1$$

La dimostrazione proviene da Schering (Acta math. I), ma sotto la forma precedente fu data da Kronecker (Monatsb. 1884, p. 527).

§. 2.

Il simbolo di Schering e la legge di reciprocità di Legendre.

58. Rappresentiamo con $\mu(m, n)$ il numero delle volte in cui nella formola (12) del n. precedente $\operatorname{sgn} R\left(\frac{mh}{n}\right)$ è negativo: si avrà

$$(1) \quad \mu(m, n) = \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \operatorname{sgn} R\left(\frac{mh}{n}\right)}{2} :$$

inoltre essendo $\frac{1 - \operatorname{sgn} R(x)}{2} = \left[x + \frac{1}{2}\right] - [x] = [2x] - 2[x]$, si ha

$$(2) \quad \begin{aligned} \mu(m, n) &= \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n}\right], \\ \mu(m, n) &= \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n}\right] - 2 \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n}\right], \end{aligned}$$

e quindi

$$(3) \quad \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n}\right]} ;$$

$$(4) \quad \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n}\right]} .$$

Nel caso di m, n impari la somma $\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} + \frac{1}{2} \right]$ è un numero pari, perchè quando x non è un intiero, si può fare $x = g + \xi$, ove g è un intiero e $0 < \xi < 1$; quindi

$$-x = -g - 1 + (1 - \xi), \quad [x] + [1 - x] = 0, \quad [x] + [2g + 1 - x] \equiv 0 \pmod{2};$$

e per $m \cdot n$ impari

$$\left[\frac{2mh}{n} \right] \equiv \left[\frac{n-2h}{n} m \right] \pmod{2}$$

$$\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} \right] = \sum_{s=2,4,\dots,2\left[\frac{n}{4}\right]} \left[\frac{ms}{n} \right] + \sum_{\frac{n}{4} < h < \frac{n}{2}} \left[\frac{2mh}{n} \right] \equiv \sum_{s=2,4,\dots,2\left[\frac{n}{4}\right]} \left[\frac{ms}{n} \right] + \sum_{\frac{n}{4} < h < \frac{n}{2}} \left[\frac{n-2h}{n} m \right] \pmod{2}.$$

Nell'ultima somma i numeri $n-2h$ sono degli interi impari, che rappresenteremo con r , e dei quali il più piccolo è uguale all'unità, il più grande $= n - 2\left[\frac{n}{4}\right]$, perciò

$$\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} \right] \equiv \sum_s \left[\frac{ms}{n} \right] + \sum_r \left[\frac{mr}{n} \right] = \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} \right] \pmod{2}$$

$$(5) \quad (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} \right]} = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} \right]}, \quad m \cdot n \equiv 1 \pmod{2};$$

le formole (3) e (4) ci danno

$$(-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} + \frac{1}{2} \right]} = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} \right]},$$

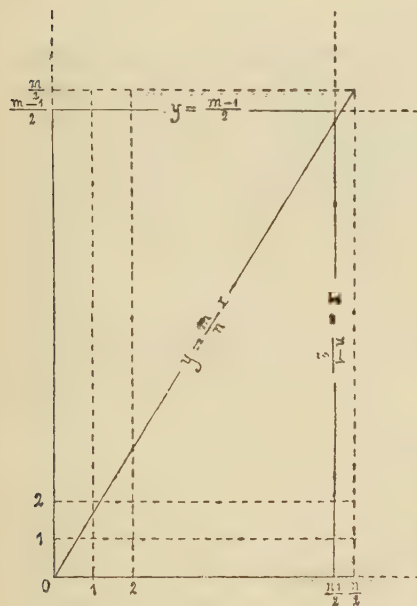
da cui si deduce che $\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} + \frac{1}{2} \right]$ è un numero pari, quando

$$m \cdot n \equiv 1 \pmod{2}, \text{ come volevamo dimostrare. Facendo } \mu'(m, n) = \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} \right]$$

si ha $\mu'(m, n) \equiv \mu(m, n) \pmod{2}$, e dunque per $m > 0$, $n > 0$, $m \cdot n \equiv 1 \pmod{2}$,

$$(6) \quad \binom{m}{n} \binom{n}{m} = (-1)^{\mu'(m, n) + \mu'(n, m)} = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} \right] + \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{nh}{m} \right]}.$$

Vediamo come si arriva alla formola di Legendre; costruiamo a tale scopo un sistema di punti le cui coordinate sono dei numeri interi positivi.



La somma $\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} \right]$ ci rappresenta il numero dei punti compresi fra l'asse delle ascisse, la retta $x = \frac{n-1}{2}$ e la retta $y = \frac{mx}{n}$, non esclusi i punti che si trovano sui due primi lati. Sulla retta $y = \frac{mx}{n}$ non c'è alcun nodo della rete, perchè i valori interi che può prendere x sono minori di $\frac{n}{2}$, e nessuno di questi intieri moltiplicato per $\frac{m}{n}$ può dare un valore intero.

La somma $\sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{nh}{m} \right]$ rappresenta il numero dei nodi della rete, compresi nel triangolo composto dall'asse delle ordinate, e le rette $y = \frac{m-1}{2}$, $y = \frac{mx}{n}$, non esclusi quei nodi che si trovano sui primi due lati. È evi-

dente che $\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{mh}{n} \right] + \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{nh}{m} \right]$ ci dà il numero di tutti i nodi del paral-

lelogrammo; ma questo numero ci è dato anche dal prodotto $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{m-1}{2}$, e rammentando i valori di $\mu'(m, n)$ e $\mu'(n, m)$, avremo

$$(7) \quad \mu'(m, n) + \mu'(n, m) = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$$

d'onde il simbolo di Legendre generalizzato, espresso dall'equazione

$$(8) \quad \left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}$$

Colla dimostrazione geometrica ¹⁾ si arriva dunque ad una formola assai generale, perchè ha luogo per m ed n interi positivi impari e primi fra loro. Ogni problema che permette di concludere la congruenza (7) è una dimostrazione della legge di reciprocità.

Nella formola (3) non è escluso il caso di m pari, e se si scrive $2m$ invece di m , e si rammenta la (4)

$$\left(\frac{2m}{n}\right) = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n}\right]} = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} + \frac{1}{2}\right]} \left(\frac{m}{n}\right);$$

d'onde, ammesso che sia $\left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{2m}{n}\right)$ (v. num. 40),

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} + \frac{1}{2}\right]},$$

identità importante, perchè ci fa vedere che la parità di $\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} + \frac{1}{2}\right]$

è indipendente da m . Applicando la formola nota $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, si

ottiene

$$\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2mh}{n} + \frac{1}{2}\right] \equiv \frac{n^2-1}{8} \pmod{2}.$$

¹⁾ È stata data la prima volta da Eisenstein (J. f. M. 28-1844, p. 246).

Ponendo m invece di $2m$, e riprendendo il risultato precedente, avremo

$$\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m h}{n} + \frac{1}{2} \right] \begin{cases} \equiv 0 \pmod{2}, & \text{quando } m \equiv 1 \pmod{2} \\ \equiv \frac{n^2-1}{8} \pmod{2}, & \text{quando } m \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

§. 3.

I cinque teoremi di Eisenstein.

60. Dei cinque teoremi enunciati da Eisenstein nel giornale di Crelle XXVII, furono pubblicate quasi contemporaneamente due dimostrazioni, l'una di Stern ¹⁾ l'altra di Tardy ²⁾. Quest'ultima, sebbene pubblicata posteriormente, fu composta avanti che Tardy avesse sott'occhio la memoria di Stern ³⁾. Alcune formole analoghe erano già state date da Schaar ⁴⁾ e Genocchi ⁵⁾.

Incominciamo coll'analisi di Stern: sia x una quantità positiva non intera, $k=[x]$ la sua parte intera, è $\varkappa = x - k$: ciò posto, la formola ben nota

$$(1) \quad \frac{1}{2} - \varkappa = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2 \nu \varkappa \pi}{\nu \pi}$$

che ha luogo sotto la condizione $0 < \varkappa < 1$, permette di concludere l'equazione

$$\frac{1}{2} - x + k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2 \nu x \pi}{\nu \pi},$$

¹⁾ Crelle LIX 1860. *Ueber einige Eigenschaften der Function Ec.*

²⁾ Annali di Matematica. *Sopra alcuni teoremi aritmetici del prof. Tardy a Genova.* Serie II, T. III p. 331.

³⁾ Ib. V. nota preposta alla memoria.

⁴⁾ *Mémoire sur une formule d'Analyse.* Ac. R. du Belgique. Bruxelles T. XXIII.

⁵⁾ *Note sur la théorie des résidus quadratiques.* A. R. B. Mémoires, Bruxelles, XXV-1854.

che dà la formola di Schaar

$$(2) \quad [x] = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x \pi}{\nu \pi}.$$

Rappresentando con p, q numeri interi positivi e tali che sia $(p, q) \sim 1$; la formola di Schaar ci dà per $x = \frac{p}{q}$

$$(3) \quad \left[\frac{p}{q} \right] = \frac{p}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\nu p \pi}{q}}{\nu}.$$

Per trasformare il secondo membro di questa equazione facciamo $\nu = \rho + \mu q$, e viene

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\nu p \pi}{q}}{\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^q \frac{\sin \frac{2\rho p \pi}{q}}{\rho + \mu q};$$

e siccome i termini nei quali $\rho = q$ sono uguali a zero; la nostra equazione diviene

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\nu p \pi}{q}}{\nu} = \frac{1}{q} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{q-1} \frac{\sin \frac{2\rho p \pi}{q}}{\rho + \frac{\mu}{q}},$$

e se poniamo $\rho = q - \rho'$, l'intero ρ' percorre i medesimi valori che percorre ρ , cioè $\rho' = 1, 2, \dots, q-1$; e

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\nu p \pi}{q}}{\nu} = \frac{1}{q} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\rho'=1}^{q-1} \frac{\sin \frac{2\rho' p \pi}{q}}{\frac{q}{\rho'} - \mu - 1}.$$

Scriviamo ρ invece di ρ' , facciamo $\mu + 1 = \nu$, e sommiamo colla precedente, il cui secondo membro sia posto sotto la forma

$$\frac{1}{q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \frac{\sin \frac{2\rho p \pi}{q}}{\frac{\rho}{q}} + \frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{q-1} \frac{\sin \frac{2\rho p \pi}{q}}{\frac{\rho}{q} + \nu};$$

avremo

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\rho p \pi}{q}}{\nu} = \frac{1}{q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \frac{\sin \frac{2\rho p \pi}{q}}{\frac{\rho}{q}} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{q-1} \left(\frac{1}{\frac{\rho}{q} + \nu} + \frac{1}{\frac{\rho}{q} - \nu} \right) \sin \frac{2\rho p \pi}{q}.$$

La somma relativa a ν dà luogo ad una serie convergente, si può invertire l'ordine delle due sommatorie, e si ha

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\rho p \pi}{q}}{\nu} = \frac{1}{q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \left\{ \frac{1}{\frac{\rho}{q}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{\rho}{q} + \nu} + \frac{1}{\frac{\rho}{q} - \nu} \right) \right\} \sin \frac{2\rho p \pi}{q}.$$

Ciò posto, la formola elementare ben nota

$$\pi \cot x \pi = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + \nu} + \frac{1}{x - \nu} \right)$$

permette di calcolare l'espressione entro parentesi, e viene

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\nu p \pi}{q}}{\nu} = \frac{\pi}{2q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \sin \frac{2\rho p \pi}{q} \cot \frac{\rho \pi}{q},$$

sostituendo nella (3)

$$(4) \quad \left[\frac{p}{q} \right] = \frac{p}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \sin \frac{2\rho p \pi}{q} \cot \frac{\rho \pi}{q},$$

e questo è il primo teorema di Eisenstein.

61. Tardy arriva alla medesima formola con una dimostrazione che merita di essere esposta a causa della sua semplicità. Si sa che

$$\sum_{\rho=0}^{q-1} e^{\frac{2k\rho\pi i}{q}} \begin{cases} = q, & \text{quando } k \text{ è divisibile per } q \\ = 0, & \text{quando } k \text{ non è divisibile per } q, \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{1}{q} \sum_{\rho=0}^{q-1} \cos \frac{2k\rho\pi}{q} \begin{cases} = 1, & \text{quando } k \text{ è divisibile per } q \\ = 0, & \text{quando } k \text{ non è divisibile per } q. \end{cases}$$

Se facciamo $k = 1, 2, \dots, p$ e sommiamo, si avrà l'unità ripetuta tante volte, quanti sono i multipli di q nella successione $1, 2, \dots, p$; e perciò

$$(5) \quad \left[\frac{p}{q} \right] = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^p \sum_{\rho=0}^{q-1} \cos \frac{2k\rho\pi}{q}.$$

Effettuando la somma rispetto a k per il caso speciale di $\rho = 0$, la somma dei coseni diviene uguale a p : per gli altri casi, applicando la formula ¹⁾

$$\sum_{k=1}^p \cos 2k\varphi = \frac{\sin p\varphi \cos (p+1)\varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} (\sin 2p\varphi \cot \varphi - 2 \sin^2 p\varphi),$$

si ha

$$\sum_{k=1}^p \cos \frac{2k\rho\pi}{q} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{2p\rho\pi}{q} \cot \frac{\rho\pi}{q} + \cos \frac{2p\rho\pi}{q} - 1 \right]$$

¹⁾ La formula della somma dei seni e dei coseni si dimostra per mezzo della

progressione esponenziale $\sum_{k=1}^q e^{k\varphi i} = e^{\varphi i} \frac{e^{q\varphi i} - 1}{e^{\varphi i} - 1} = e^{\frac{q+1}{2}\varphi i} \frac{e^{\frac{q}{2}\varphi i} - e^{-\frac{q}{2}\varphi i}}{e^{\frac{1}{2}\varphi i} - e^{-\frac{1}{2}\varphi i}};$

e sostituendo le funzioni ciclotomiche alle logaritmiche, $\sum_{k=1}^q (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) =$

$$= \left(\cos \frac{q+1}{2}\varphi + i \sin \frac{q+1}{2}\varphi \right) \frac{\sin \frac{q}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}, \text{ e separando la parte reale dall'immaginaria}$$

$$\sum_{k=1}^q \cos k\varphi = \frac{\cos \frac{q+1}{2}\varphi \sin \frac{q}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \quad \sum_{k=1}^q \sin k\varphi = \frac{\sin \frac{q+1}{2}\varphi \sin \frac{q}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$$

e

$$\sum_{h=1}^p \sum_{\rho=0}^{q-1} \cos \frac{2kp\pi}{q} = p + \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{q-1} \left[\sin \frac{2p\rho\pi}{q} \cot \frac{\rho\pi}{q} + \cos \frac{2p\rho\pi}{q} \right] - \frac{q-1}{2}.$$

Quando q non è un divisore di p , $\sum_{\rho=1}^{q-1} \cos \frac{2p\rho\pi}{q} = -1$, dunque con un semplice calcolo, sostituendo in (5), abbiamo di nuovo la formola del primo teorema di Eisenstein

$$\left[\frac{p}{q} \right] = \frac{p}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \sin \frac{2p\rho\pi}{q} \cot \frac{\rho\pi}{q}.$$

Si può dedurre dalla (5) un'elegante rappresentazione del massimo comun divisore. Supponiamo che p e q abbiano l come massimo comun divisore, e sia

$$p = al \qquad q = bl,$$

mettendo nella (5), in luogo di k , hp , e facendo successivamente $h = 1, 2, \dots, b-1, b, b+1, \dots, lb$, è chiaro che si avrà l'unità tante volte quante h prende un valore che è multiplo di b , e zero in caso diverso: sarà dunque

$$(6) \qquad l = \frac{1}{q} \sum_{h=1}^p \sum_{\rho=0}^{q-1} \cos \frac{2hp\rho\pi}{q}.$$

Per arrivare alle altre formole di Eisenstein è quistione di facili trasformazioni, e ci terremo di preferenza al metodo di Tardy, che ci sembra più originale¹⁾, e arriva alle conclusioni che ci interessano in una maniera più semplice di quella di Stern.

¹⁾ Un metodo analitico della specie di quello usato da Stern si potrebbe ben immaginare leggendo la memoria di Tardy e la nota sulla teoria dei residui quadratici del Genocchi pubblicata a Bruxelles sei anni prima che comparisse quella di Stern. Questa memoria di Genocchi citata anche da Tardy contiene fra le altre le formole (19) e (35) che corrispondono ai teoremi II e III di Eisenstein, e le ottiene nella maniera seguente. Nella serie trigonometrica che dà il valore di $\frac{1}{2} - z$, e che abbiamo dato al num. 60, fa $z = \frac{a}{b}$ (a e b sono interi), pone

62. La formola (4) permette d'esprimere sotto una forma algebrica esplicita il numero intero che esprime il resto della divisione di p per q , cioè ci dà con una semplice trasformazione

$$(7) \quad p - q \left[\frac{p}{q} \right] = \frac{1}{2} \left(q - \sum_{\rho=1}^{q-1} \sin \frac{2 \rho p \pi}{q} \cot \frac{\rho \pi}{q} \right),$$

che costituisce il secondo teorema di Eisenstein.

inoltre $b' = \left[\frac{b}{2} \right]$, $r = a - b \left[\frac{a}{b} \right]$, ed arriva facilmente (V, (19) della memoria citata) a

$$r = \frac{b}{2} - \sum_{s=1}^{b'} \sin \frac{2 s a \pi}{b} \cot \frac{s \pi}{b}.$$

Inoltre suppone $b = n$, n essendo primo, impari, positivo, $a = m x$, $x = 1, 2, \dots, \frac{1-2}{2}$; rappresenta con M la somma dei numeri positivi congrui a $m, 2m, \dots, \frac{n-1}{2} m$ rispetto al modulo n ed inferiori ad n ; trova così

$$M = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{s m \pi}{2n} \cot \frac{s \pi}{n};$$

e rappresentando con m_1 il numero dei resti del sistema $m, 2m, \dots, \frac{n-1}{2} m$ che non sorpassano $\frac{n}{2}$, e con M_1 la loro somma, trova

$$m_1 n = \frac{n^2 - 1}{8} + 2M_1 - M = 2M_1 - \frac{(n-1)^2}{8} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{s m \pi}{2n} \cot \frac{s \pi}{n}.$$

« Si vede che se si pone (VII form. 35 ib.)

$$\lambda = \frac{(n-1)^2}{8} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{s m \pi}{2n} \cot \frac{s \pi}{n},$$

« i numeri m , e λ saran tutti e due pari, o tutti e due impari. Ora secondo « un lemma di Gauss si ha $\left(\frac{m}{n} \right) = (-1)^{m_1}$, se n è un numero primo impari e « $(m, n) \sim 1$, si avrà dunque anche $\left(\frac{m}{n} \right) = (-1)^\lambda$, e per conseguenza il numero « λ dato dalla formola 35 determinerà il carattere quadratico del numero m rispetto al numero primo n ».

Sieno p e q due interi positivi impari e primi fra loro, e sia λ un intero qualunque più piccolo di q : se nella formola (4) mettiamo λp invece di p , avremo

$$\left[\frac{\lambda p}{q} \right] = \frac{\lambda p}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \sin \frac{2p\lambda\rho\pi}{q} \cot \frac{\rho\pi}{q},$$

da cui

$$(8) \quad \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{\lambda p}{q} \right] = \frac{q^2-1}{8} \frac{p}{q} - \frac{q-1}{4} + \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \cot \frac{\rho\pi}{q} \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \sin \frac{2p\lambda\rho\pi}{q} :$$

ma

$$\sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \sin \frac{2p\lambda\rho\pi}{q} = \frac{\sin \left(\frac{q-1}{2} \frac{p\rho\pi}{q} \right) \sin \left(\frac{q+1}{2} \frac{p\rho\pi}{q} \right)}{\sin \frac{p\rho\pi}{q}},$$

ed applicando la formola $-(\cos p + \cos q) = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \sin \frac{2p\lambda\rho\pi}{q} = - \frac{(-1)^\rho - \cos \frac{p\rho\pi}{q}}{2 \sin \frac{p\rho\pi}{q}},$$

si potrà dunque scrivere

$$(9) \quad \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{\lambda p}{q} \right] = \frac{q^2-1}{8} \frac{p}{q} - \frac{q-1}{4} - \frac{1}{4q} \sum_{\rho=1}^{q-1} \frac{(-1)^\rho - \cos \frac{p\rho\pi}{q}}{\sin \frac{p\rho\pi}{q}} \cot \frac{\rho\pi}{q}.$$

Rappresentiamo con ρ' i valori pari di ρ , e con ρ'' i valori impari, sarà

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\rho=1}^{q-1} \frac{(-1)^\rho - \cos \frac{p\rho\pi}{q}}{\sin \frac{p\rho\pi}{q}} \cot \frac{\rho\pi}{q} = \\ &= \sum_{\rho'} \frac{1 - \cos \frac{p\rho'\pi}{q}}{\sin \frac{p\rho'\pi}{q}} \cot \frac{\rho'\pi}{q} - \sum_{\rho''} \frac{1 + \cos \frac{p\rho''\pi}{q}}{\sin \frac{p\rho''\pi}{q}} \cot \frac{\rho''\pi}{q} \end{aligned}$$

e perchè $q - \rho'' = \rho'$, è numero pari, $\rho'' = q - \rho'$,

$$\cos \frac{p\rho''\pi}{q} = \cos \left(p\pi - \frac{p\rho'\pi}{q} \right) = -\cos \frac{p\rho'\pi}{q}, \quad \cot \frac{\rho''\pi}{q} = -\cot \frac{\rho'\pi}{q};$$

$$A = 2 \sum_{\rho'} \frac{1 - \cos \frac{p\rho'\pi}{q}}{\sin \frac{p\rho'\pi}{q}} \cot \frac{\rho'\pi}{q}.$$

Per mezzo delle formole $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, e facendo $\rho' = 2\rho$, si ha

$$A = 2 \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{p\rho\pi}{q} \cot \frac{2\rho\pi}{q},$$

e sostituendo nella formola (9) il valore di A, si arriva al terzo teorema di Eisenstein

$$(10) \quad \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{\lambda p}{q} \right] = \frac{q^2-1}{8} \frac{p}{q} - \frac{q-1}{4} - \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{p\rho\pi}{q} \cot \frac{2\rho\pi}{q}.$$

Quando p è un numero pari, e le altre condizioni restano le stesse, si

$$\begin{aligned} & \text{ottiene pure la form. (8); ma in questo caso} \quad \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \sin \frac{2p\lambda\rho\pi}{q} = -\frac{\sin^2 \frac{p\rho\pi}{2q}}{\sin \frac{p\rho\pi}{q}} \\ & = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{p\rho\pi}{2q}, \quad \text{quindi la (8) diviene} \end{aligned}$$

$$(10^{bis}) \quad \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{\lambda p}{q} \right] = \frac{q^2-1}{8} \frac{p}{q} - \frac{q-1}{4} - \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{p\rho\pi}{2q} \cot \frac{\rho\pi}{q}.$$

63. Sia ora a un intero non divisibile per q ; sappiamo che

$$\left(\frac{a}{q} \right) = (-1)^{v(a, q)} \quad (q > 0)$$

(v. num. 52 form. 2)

$$\mu(a, q) = \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{2a\lambda}{q} \right] - 2 \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{\lambda a}{q} \right].$$

1.° Se a è *impari*, sostituiamo a a p nella formola (10), e $2a$ a p nella (10^{bis}), notando che

$$2 \cot \frac{2\rho\pi}{q} = \cot \frac{\rho\pi}{q} - \operatorname{tg} \frac{\rho\pi}{q},$$

si avrà

$$(11) \quad \mu(a, q) = \frac{q-1}{4} - \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{a\rho\pi}{q} \operatorname{tg} \frac{\rho\pi}{q}.$$

Con un processo tutt'affatto simile Kronecker ritrovò più tardi ¹⁾ la formola

$$\sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sgn} R \left(\frac{hn}{m} \right) = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{nh\pi}{m} \operatorname{tg} \frac{h\pi}{m}$$

che è equivalente alla (11).

Nel caso particolare di $a=1$, si ha $\mu(1, q)=0$, e la (11) dà la relazione

$$\sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\operatorname{tg} \frac{\rho\pi}{q} \right]^2 = \frac{q(q-1)}{2}.$$

2.° Sia a un numero pari: la 10^{bis} ci dà

$$\mu(a, q) = \frac{q-1}{4} + \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \left(2 \operatorname{tg} \frac{a\rho\pi}{2q} - \operatorname{tg} \frac{a\rho\pi}{q} \right) \cot \frac{\rho\pi}{q}$$

¹⁾ Die absoluten kleinsten Reste reeller Grössen. Sitzungsab. der A. B. 1885, pag. 388.

e perchè:

$$2 \operatorname{tg} \frac{a \rho \pi}{2q} = \operatorname{tg} \frac{a \rho \pi}{q} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a \rho \pi}{2q} \right),$$

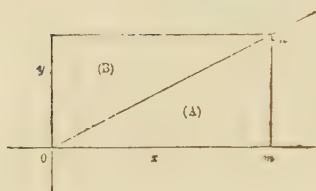
$$\mu(a, q) = \frac{q-1}{4} - \frac{1}{2q} \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{a \rho \pi}{q} \operatorname{tg}^2 \frac{a \rho \pi}{2q} \cot \frac{\rho \pi}{q}.$$

Limitandosi al caso di a impari, e facendo uso della congruenza (n. 58-(2))

$$\sum_{\lambda=1}^{q-1} \left[\frac{a\lambda}{q} \right] \equiv \mu(a, q) \pmod{2},$$

si ha il quarto teorema di Eisenstein

$$(12) \quad \left(\frac{a}{q} \right) = (-1)^{\frac{1}{2} \left\{ \frac{(a-2)q^2 + 2q - a}{4} - \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{a \rho \pi}{q} \cot \frac{2 \rho \pi}{q} \right\}}.$$



64. Per dimostrare il quinto teorema useremo il metodo geometrico. Consideriamo i punti di coordinate x, y , intere e positive e tali che sia $x \leq m, y \leq \left[\frac{px}{q} \right]$: questi punti in numero di A, si trovano nel triangolo (A), e

$$A = \sum_{x=1}^m \left[\frac{px}{q} \right].$$

Sia $n = \left[\frac{mp}{q} \right]$, e consideriamo i punti a coordinate intere del triangolo (B), il cui numero è evidentemente

$$B = \sum_{y=1}^n \left[\frac{qy}{p} \right].$$

La somma $A + B$ è il numero di punti a coordinate intere, posti nel rettangolo (A) + (B) più il numero δ dei punti di coordinate intere, che

appartengono alla diagonale $y = \frac{px}{q}$. Se $(p, q) \sim 1$, $m < q$, si ha $\delta = 0$.

In questo caso

$$\sum_{x=1}^m \left[\frac{px}{q} \right] + \sum_{y=1}^n \left[\frac{qy}{p} \right] = mn \quad n = \left[\frac{mp}{q} \right].$$

Sia v un divisore comune di $p-1$, e di $q-1$, e poniamo $m = \frac{q-1}{v}$; si ottiene $n = \left[\frac{(q-1)p}{qv} \right] = \left[\frac{q + (p-1)q - p}{qv} \right] = \left[\frac{q-p}{qv} \right] + \frac{p-1}{v}$, a condizione che sia $q > p$.

Evidentemente è $\frac{q-p}{qv} < 1$, e viene $n = \frac{p-1}{v}$, di guisa che si ha il quinto teorema di Eisenstein

$$(13) \quad \sum_{x=1}^{\frac{q-1}{v}} \left[\frac{px}{q} \right] + \sum_{y=1}^{\frac{p-1}{v}} \left[\frac{qy}{p} \right] = \frac{p-1}{v} \cdot \frac{q-1}{v}.$$

Per $m = \frac{h(q-1)}{v}$, $h \leq v$, il calcolo precedente dà

$$n = \left[\frac{h(q-p)}{vq} \right] + h \frac{p-1}{v} = h \frac{p-1}{v},$$

d'onde il teorema di Sylvester

$$(14) \quad h \sum_{x=1}^{\frac{q-1}{v}} \left[\frac{px}{q} \right] + h \sum_{y=1}^{\frac{p-1}{v}} \left[\frac{qy}{p} \right] = \frac{h^2}{v^2} (p-1)(q-1).$$

Nella formola (10) facciamo

$$F(p, q) = \sum_{\rho=1}^{\frac{q-1}{2}} tg \frac{p\rho\pi}{q} \cot \frac{2\rho\pi}{q} :$$

sarà

$$F(p, q) = \frac{q^2-1}{4} p - \frac{q(q-1)}{2} - 2q \sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{\lambda p}{q} \right]$$

e parimente

$$F(q, p) = \frac{p^2-1}{4} q - \frac{p(p-1)}{2} - 2p \sum_{\lambda=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{\lambda q}{p} \right].$$

Moltiplichiamo l'ultima per q e la penultima per p , e sommiamo;

$$\begin{aligned} pF(p, q) + qF(q, p) &= \frac{p^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} + \\ &+ pq - \frac{pq(p+q)}{2} - 2pq \left(\sum_{\lambda=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{\lambda p}{q} \right] + \sum_{\lambda=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{\lambda q}{p} \right] \right); \end{aligned}$$

e poichè p e q sono impari e primi fra loro, si può fare nella formola (13) $r=2$: allora la quantità entro parentesi nel secondo membro dell'ultima formola diviene $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$, e si ha ¹⁾

$$(15) \quad pF(p, q) + qF(q, p) = -\frac{1}{4}(p-q)^2$$

Anche questa relazione fu enunciata da Eisenstein nel J. de Crelle XVII p. 282, ove per uno sbaglio di stampa, si legge $-\frac{1}{2}(p-q)^2$ invece di $-\frac{1}{4}(p-q)^2$.

¹⁾ Dividendo tutto per pq

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}F(p, q) + \frac{1}{p}F(q, p) &= \frac{1}{4}p \frac{q^2-1}{q} + \frac{1}{4}q \frac{p^2-1}{p} - \frac{1}{2}(p+q-2) - \frac{pq-p-q+1}{2} = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2 \right). \end{aligned}$$

INDICE

PREFAZIONE	pag. 7
BIBLIOGRAFIA	» 11

CAPO I.

Metodi analitici.

§ 1. — Definizione delle somme di Gauss. Enunciato della legge di reciprocità delle somme di Gauss »	13
2. — a) Metodo di Dirichlet e Kronecker »	14
b) Le serie trigonometriche e le somme di Gauss »	20
3. — Il metodo di Cauchy per la determinazione delle somme di Gauss per mezzo delle funzioni ellittiche »	23
4. — Altra esposizione del metodo di Cauchy »	30
5. — Secondo metodo di Kronecker. Le somme di Gauss stabilite per mezzo del teorema fondamentale di Cauchy sugli integrali delle funzioni di variabile complessa »	33
6. — Metodo del sig. Lerch »	37

CAPO II.

Sviluppi aritmetici.

§ 1. — Diverse proprietà delle somme $G(\lambda, \mu)$. Il caso di μ primo	pag. 44
2. — La Legge di reciprocità di Legendre »	49
3. — a) Le somme $G(\lambda, \mu)$ nel caso generale. Il simbolo di Jacobi »	52
b) Generalizzazione dei simboli »	57
4. — a) Introduzione dei Discriminanti nella legge di Legendre generalizzata »	61
b) Del caso in cui si possono aggiungere al numeratore del simbolo generalizzato i multipli del denominatore »	63
c) Altre semplificazioni »	65

d) Introduzione dei discriminanti nelle formole che danno il valore delle somme di Gauss	pag. 68
§ 5. — I discriminanti e l'Algoritmo di Euclide	70

CAPO III.

Metodo algebrico di Gauss.

§ 1. — Le due formole fondamentali della memoria « Summatio quarundam serierum singularium »	pag. 75
2. — Applicazione alla determinazione del valore delle somme $G(\lambda, \mu)$ »	81
3. — L'espressione aritmetica del segno di Jacobi dedotta come conseguenza della Memoria di Gauss	89

CAPO IV.

**Di alcune considerazioni a proposito del teorema di Schering,
e dei teoremi di Eisenstein.**

§ 1. — Il Lemma di Gauss generalizzato da Schering	pag. 93
2. — Il simbolo di Schering e la legge di reciprocità di Legendre	99
3. — I cinque teoremi di Eisenstein	103

